



PROGRAMA PRE-PAES 2014

Asignatura: Matemática

Contenido Virtual

TEMA: “ESTUDIEMOS SUCESSIONES ARIMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS”

Profesor: Luis Roberto Padilla R. e-mail: alpadilla1@ufg.edu.sv

Coordinador General: Lic. José Pérez Sánchez
e-mail: jperez@ufg.edu.sv

Asistente Académico: Lic. Herbert Crespín Elías
E-mail: hcrespin@ufg.edu.sv

Tiempo estimado de lectura y resolución de ejercicios del Material: 2 Horas

CAPÍTULO I



Leonardo Fibonacci

ESTUDIEMOS SUCESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS.

COMPETENCIAS DE APRENDIZAJE.

Al finalizar el capítulo el alumno/a será competente para:

- ❖ Identificar, con interés y seguridad, una sucesión aritmética y describir y explicar, todas sus características.
- ❖ Deducir y explicar, con perseverancia y confianza, el término general de una sucesión aritmética.
- ❖ Identificar y calcular, con interés, todos los medios aritméticos entre dos términos de una sucesión aritmética.
- ❖ Aplicar correctamente y con precisión la fórmula para obtener la suma de los primeros términos de una sucesión aritmética.
- ❖ Identificar, explicar y describir las características de una sucesión geométrica, con interés y seguridad.
- ❖ Deducir y explicar, con interés y seguridad, el término general de una sucesión geométrica.

- ❖ Identificar y calcular los medios geométricos entre dos términos de una sucesión geométrica, con seguridad e interés.

Una sucesión es una función matemática que toma como dominio el conjunto de los números naturales y su rango es otro conjunto definido en los reales. Cada uno de los números reales se llama términos de la sucesión.

TÉRMINO GENERAL

Es la regla o fórmula que nos permite encontrar cualquier término de una sucesión. No todas las sucesiones tienen término general.

SUCESIÓN ARITMÉTICA.

- ❖ **Fórmula del término general**

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad a_n = a_1 + (n - 1)d$$

- ❖ **Primer término:** Si conoces la razón y cualquier otro término, se tiene la siguiente fórmula.

$$a_1 = a_n - (n - 1)d$$

- ❖ **La razón:** Si se conoce el primer término y un término cualquiera, se tiene la siguiente fórmula.

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

- ❖ **Número de términos:** Si se conoce la razón y el primer y último término de la progresión, se tiene la siguiente fórmula.

$$n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}$$

❖ **Suma de los primeros n-esimos términos**

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

- Si la razón de una progresión geométrica es menor que cero, la progresión es alterna, es decir, sus términos son alternativamente positivos y negativos.

SUCESIÓN GEOMÉTRICA

Se dice que una serie de números están en **progresión geométrica** cuando cada uno de ellos (excepto el primero) es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante llamada **razón** de la progresión.

- Si la razón de una progresión geométrica es mayor que uno, la progresión es creciente, es decir, cada término es mayor que el anterior.
- Si la razón de una progresión geométrica está comprendida entre cero y uno, la progresión es decreciente, es decir, cada término es menor que el anterior.
- Si la razón de una progresión geométrica es igual a uno, la progresión es constante, es decir, tiene todos los términos iguales.

❖ **Formula del término general**

$$a_n = a_1 * r^{n-1}$$

- ❖ **Primer término:** Si conoces la razón y cualquier otro término, se tiene la siguiente fórmula.

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

- ❖ **La razón:** Si se conoce el primer término y un término cualquiera, se tiene la siguiente fórmula.

$$r = \sqrt[n-1]{\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}$$

- ❖ **Número de términos:** Si se conoce la razón y el primer y último término de la progresión, se tiene la siguiente fórmula.

$$n = \frac{\log\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\log r} + 1$$

- ❖ Cuando entre dos términos consecutivos de una sucesión existe una razón constante, se le llama sucesión geométrica

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

❖ **Suma de los primeros n-esimos términos**

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sea la sucesión 1, 3, 5, 7, 9, ... ¿Cuál es su término general?

Resolución:

Se trata de una progresión aritmética de diferencia $d = 2$ y primer término $a_1 = 1$. El término general es, por tanto:

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$$

2. Escribir los seis primeros términos de la sucesión $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Resolución:

$$a_1 = 3 \cdot 2^{1-1} = 3 \cdot 1 = 3 \qquad a_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 = 6 \qquad a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$$

$$a_3 = 3 \cdot 2^2 = 12 \qquad a_6 = 3 \cdot 2^5 = 96$$

3. En una progresión aritmética se sabe que $a_1 = -2$, $a_{32} = 91$, $a_{16} = 43$. Encontrar a_{17} .

Resolución:

Puesto que $1 + 32 = 16 + 17 = 33$, por la propiedad de los términos equidistantes,

$$\begin{aligned} a_1 + a_{32} &= a_{16} + a_{17} \\ -2 + 91 &= 43 + a_{17} \Rightarrow a_{17} = 46 \end{aligned}$$

4. Interpolar cinco medios aritméticos entre -18 y 25.

Resolución:

- La progresión es: -18, a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , 25.
- Aplicando la fórmula obtenida con $a = -18$ y $b = 25$.

$$d = \frac{25 - (-18)}{5 + 1} = \frac{43}{6}$$

$$a_1 = -18 + \frac{45}{6} = -\frac{65}{6}$$

$$a_2 = -\frac{65}{6} + \frac{43}{6} = -\frac{22}{6} = -\frac{11}{3}$$

$$a_3 = -\frac{11}{3} + \frac{43}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$a_4 = \frac{7}{2} + \frac{43}{6} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$$

$$a_5 = \frac{32}{3} + \frac{43}{6} = \frac{107}{6}$$

La progresión aritmética que se buscaba es:

$$-18, \frac{-65}{6}, \frac{-11}{3}, \frac{7}{2}, \frac{32}{3}, \frac{107}{6}, 25, \dots$$

5. Sumar los veinte primeros términos de la progresión:

-5, 4, 13, 22, 31, 40

Resolución:

$$\bullet S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot d$$

• La diferencia es $d = 9$

$$\bullet a_{20} = -5 + (20 - 1) \cdot 9$$

$$a_{20} = -5 + 19 \cdot 9 = 166$$

$$\bullet S_{20} = \frac{-5 + 166}{2} \cdot 20 = 1610$$

6. ¿Cuál es el término general de la progresión -1, 2, -4, 8, -16, ...?

Resolución:

• Es una progresión geométrica en la que el primer término a_1 vale -1, y la razón es:

$$\frac{2}{-1} = \frac{-4}{2} = \frac{8}{-4} = \frac{-16}{8} = -2$$

• Su término general es, pues:

$$a_n = -1 \cdot (-2)^{n-1}$$

7. Interpolando cuatro medios geométricos entre 128 y 4.

Resolución:

- La progresión es 128, a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , 4.

Aplicando la fórmula obtenida con $a = 128$ y $b = 4$:

$$r = \sqrt[5]{\frac{4}{128}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^5}} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet a_1 = 128 \cdot \frac{1}{2} = 64$$

$$a_2 = 64 \cdot \frac{1}{2} = 32$$

$$a_3 = 32 \cdot \frac{1}{2} = 16$$

$$a_4 = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$$

La progresión geométrica que se buscaba es:

128, 64, 32, 16, 8, 4, ...

8. Sabiendo que 3 es el primer término de una progresión geométrica y 1 875 el quinto, calcular la suma de esos cinco términos.

Resolución:

$$\bullet a_5 = 1875 = 3 \cdot 5^4 = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow r^4 = 5^4 \Rightarrow r = \pm 5$$

$$\bullet \text{Si } r = 5, S_5 = 3 \cdot \frac{5^5 - 1}{5 - 1} = 3 \cdot \frac{3124}{4} = 2343$$

$$\text{Si } r = -5, S_5 = 3 \cdot \frac{(-5)^5 - 1}{-5 - 1} = 3 \cdot \frac{-3126}{-6} = 1563$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El Descubre el valor del octavo término de la sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, a_n$$

- a) 6/7
- b) 7/8
- c) 8/9
- d) 9/10

2. El término general de la sucesión está definido por una de las siguientes ex-

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \dots, a_n$$

presiones. Identifica la expresión correcta.

a)

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

b)

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

c)

$$a_n = \frac{1}{2}n$$

d)

$$a_n = n - \frac{1}{2}$$

3. Al realizar la suma de los primeros cuatro términos de la sucesión se obtiene:

$$a_n = n + (-1)^n$$

- a) 2
- b) 5
- c) 6
- d) 10

4. El vigésimo cuarto término de la sucesión es el valor:

$$a_n = 2 - \frac{1}{6}n$$

- a) -2
- b) 2
- c) 6
- d) 10

5. Al sumar los primeros quince términos de la sucesión obtengo:

$$a_n = 3n - 5$$

- a) 250
- b) 285
- c) 315
- d) 435

6. El término general de la sucesión 11, 15, 19, 23, 27, . . . está definido por:

- a) $a_n = n + 4$
- b) $a_n = 10n + 1$
- c) $a_n = 4n + 7$
- d) $a_n = 3n - 4$

7. El término general de la sucesión está definido por:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \dots$$

- a) $a_n = \frac{3^n}{2^n}$
- b) $a_n = \frac{3^{2n-1}}{2^n}$
- c) $a_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$
- d) $a_n = \frac{3^{n-1}}{2^n}$

8. La sucesión geométrica posee por razón constante el valor de:

$$-\frac{7}{6}, \frac{7}{18}, -\frac{7}{54}, \frac{7}{162}, \dots, a_n$$

- a) -3
- b) 3
- c) $\frac{1}{3}$**
- d) $-\frac{1}{3}$

9. Al interpolar cuatro medios geométricos entre los números 45 y 10,935 se obtiene una razón constante de:

- a) 2
- b) 3
- c) 4

d) 5

10. Al sumar los primeros seis términos de la sucesión resulta:

$$a_n = \frac{4^n}{3}$$

- a) 18.47
- b) 3.78
- c) 16.86
- d) 28

11. Al calcular la suma de los múltiplos de 9 comprendidos entre 200 y 300 resulta:

- a) 2,500
- b) 2,772
- c) 3,024
- d) 25,250

12. Al interpolar tres medios geométricos entre los números 359 y 465,264 se obtiene por razón constante:

- a) 2.5
- b) 4
- c) 6
- d) 10.9

13. Hallar la suma de los primeros diez términos de la sucesión 5, 15, 45, 135, 405,...

- a) 73,812
- b) 3,400
- c) 25,568
- d) 147,620

14. Un maratonista en su plan de entrenamiento, decide correr cinco kilómetros en el primer día, ocho kilómetros en el segundo día, once kilómetros en el tercer día; y así sucesivamente durante diez días. ¿Cuántos kilómetros correrá el décimo día de entrenamiento?

- a) 35
- b) 32
- c) 29
- d) 26

15. Joaquín realiza los siguientes depósitos al inicio de cada mes en un año: \$0.01 en enero, \$0.03 en febrero. \$0.09 en marzo, \$0.27 en abril; y así sucesivamente hasta diciembre. ¿Cuánto dinero tendrá para poder utilizar en sus compras navideñas?

- a) \$5,314.40
- b) \$2,657.20
- c) \$1,328.61
- d) \$ 885.74

16. Don Mario ha ganado \$168 en 7 días laborales. Si sus ganancias diarias están en sucesión aritmética y el primer día ganó \$18 ¿Cuánto ganó el séptimo día?
- a) \$30
 - b) \$24
 - c) \$25
 - d) \$18
17. Un motociclista inicia el descenso de una cuesta, logra recorrer 2 metros en el primer segundo y, en cada uno de los segundos posteriores, avanza tres metros más que en el segundo anterior. Si termina de bajar 15 segundos después que inicio el descenso, ¿cuál es el largo de la cuesta?
- a) 44 metros
 - b) 301 metros
 - c) 345 metros
 - d) 690 metros
18. Pedro acaba de obtener su primer empleo, en el cual ganará 200 dólares mensuales; pero se la ha prometido que cada año se le hará un aumento de 25 dólares. Si Pedro trabajara durante 35 años y luego se jubilará, entonces el sueldo mensual que devengaría a la hora de su retiro sería de:
- a) 850 dólares
 - b) 950 dólares
 - c) 1050 dólares
 - d) 1075 dólares
19. Cierta bacteria se duplica cada dos minutos. Aproximadamente, ¿cuántos minutos tardará un cultivo de 1000 bacterias convertirse en uno de 512,000 bacterias?
- a) 12
 - b) 14
 - c) 16
 - d) 18
20. El valor de la suma $1+2+3+4+5+6+7+8+\dots+199+200$, es:
- a) 5,000
 - b) 10,800
 - c) 20,100
 - d) 40,000

21. Dada la sucesión infinita de números: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64,... ¿Qué número sigue después de 64?

- a) 65
- b) 81
- c) 74
- d) Cualquier número mayor que 64

22. A un pueblo llegó una persona con gripe y desató una epidemia, la cual creció tan rápidamente que cada día había el doble de personas contaminadas que había el día anterior. Es decir que el segundo día había 2 engripados, el tercero había 4 y así sucesivamente. El pueblo fue contaminado completamente en 20 días.

A ese ritmo de contagio, ¿Cuánto tiempo habría tardado el pueblo en contaminarse completamente, si el primer día hubieran llegado 2 personas enfermas de gripe?

- a) 10 días
- b) 19 días
- c) 20 días
- d) No es posible saberlo; porque no se conoce cuántos habitantes tiene el pueblo.

23. La sucesión aritmética cuyo primer término es 1 y cuyo décimo término es 73, tiene como quinto término el siguiente.

- a) 33
- b) 40
- c) 45
- d) 50

24. Si entre 31 y 59 se interpolan tres medios aritméticos estos son:

- a) 33, 46 y 52
- b) 38, 47 y 51
- c) 38, 45 y 52
- d) 36, 45 y 50

25. El tercer término de una sucesión geométrica es 6 y el sexto es 48, entonces el primer término es:

- a) 1
- b) 1.5
- c) 2
- d) 3

26. Al efectuar la suma $9 + 16 + 23 + \dots + 422$, se obtiene.

- a) 2, 954
- b) 10, 550
- c) 12, 930
- d) 25, 860

27. Si entre 4 y 864 se interpolan dos medios geométricos, estos son:

- a) 32 y 128
- b) 64 y 512
- c) 48 y 192
- d) 24 y 144

28. El número de términos de la sucesión: 7, 10, 13, 16, ... que deben sumarse para obtener 1515 es:

- a) 15
- b) 20
- c) 25
- d) 30

29. Fernando ahorró desde el 1º de enero hasta el 9 de mayo. 5ctvs el 1º de enero, 10ctvs el 2 de enero, 15ctvs el 3 de enero, y así sucesivamente. Febrero tiene ese año 28 días. Ahorra hasta el 9 de mayo. ¿Qué cantidad de dinero ahorró ese último día?

- a) \$6.05
- b) \$6.35
- c) \$6.45
- d) \$6.50

30. El inventor del juego del ajedrez pidió como recompensa: 1 grano de trigo por la primera casilla del tablero; 2 por la segunda; 4 por la tercera..., por cada casilla el doble de granos que por la anterior. ¿Cuánto granos de trigo pidió por la casilla # 16?

- a) 31 granos
- b) 256 granos
- c) 32,768 granos
- d) 65, 535 granos

31. A un estudiante de bachillerato le dejaron leer una obra que será evaluada dentro de 15 días. Para prepararse, el joven se propuso leer el primer día 9 páginas de la obra, el segundo 13 páginas, el tercero 17 páginas, y así sucesivamente, hasta completar la lectura en 14 días. ¿Cuántas páginas tiene la obra?

- a) 980
- b) 490
- c) 854

d) 182

32. Para el próximo año, el abuelo ha prometido a Andrea que le dará un centavo el primer día del año, dos centavos el segundo día del año, tres centavos el tercer día del año y así sucesivamente durante 150 días. ¿En total, cuánto dinero recibirá Andrea?

- a) \$225.00
- b) \$150.00
- c) \$113.25
- d) \$ 75.50

33. Una persona quiere cancelar su tarjeta de crédito y para eso tiene que pagar \$16,800. Escoge un plan de pago de 12 cuotas y la última que pagará será de \$2,500. Si la diferencia entre cada una de las cuotas sucesivas es constante, ¿cuánto tendrá que pagar en la primera cuota?

- a) \$227.3
- b) \$1100
- c) \$1300
- d) \$300

34. Doña María quiere regalar a su hijo que se casará dentro de un año la prima de una casa. Para eso ahorra el 1^{er} mes \$0.01; el 2^{do} \$0.03; el 3^{ero} \$0.09 y así sucesivamente hasta que se cumpla un año. ¿Cuánto dinero entregará a su hijo?

- a) $S_n = \frac{0.01(3^{12}-1)}{3-1} = 2,657$
- b) $S_n = (3-1)^{12} = 4,096$
- c) $\frac{(3^{\square}-1)^{12}}{3-1} = 2,048$
- d) $S_n = (0.01(3^{12}-1)) = 5,314$

35. Don Antonio compró un terreno en la playa y desea que le perforen un pozo, de la profundidad que sea necesario hasta encontrar agua potable. Los perforadores empiezan a trabajar bajo el convenio siguiente:

Por el primer metro perforado, don Antonio pagará 5 dólares. Por el segundo pagará el doble que por el primero. Por el tercero pagará el doble de lo que pagó por el segundo y así sucesivamente, por cada nuevo metro pagará el doble de lo que pagó por el metro anterior.

Si el agua se encuentra a 10 metros de profundidad, entonces don Antonio deberá pagar:

- a) 50 dólares
- b) 275 dólares
- c) 5115 dólares
- d) 2560 dólares

36. El término n-ésimo de la sucesión o término general de 1,5,9,..., es:

- a) 4

- b) $4+(n-1)$
- c) $5n-4$
- d) $4n-3$

37. Si una sucesión aritmética tiene como décimo término 60 y su diferencia es 3, ¿cuáles son los tres primeros términos?

- a) 57, 60 y 63
- b) 54, 57 y 60
- c) 33, 36 y 39
- d) 20, 23 y 26

38. Una sucesión aritmética consta de 10 términos y el primero es -2 , ¿cuál es el último término, si la suma de todos ellos es 70?

- a) 12
- b) 16
- c) 72
- d) 78

39. Un empleado pagará al banco una deuda de \$ 15, 000 en la forma siguiente: en el primer mes \$1,000, en el segundo \$1,250, en el tercero \$1,500, y así sucesivamente. ¿En cuántos meses cancelará la deuda?

- a) 8
- b) 12
- c) 15
- d) 57

40. A un paciente del Hospital Rosales se le especifica en su tratamiento médico la dosis de su medicamento de la siguiente manera: para el primer día 100 mg, para el segundo 95 mg, para el tercer día 90 mg y así sucesivamente. Si el tratamiento es de 12 días, ¿cuántos mg de medicina consumirá?

- a) 45
- b) 155
- c) 870
- d) 1140

SE PROHIBE LA REPRODUCCION PARCIAL
O TOTAL DE ESTE DOCUMENTO DERECHOS RESERVADOS PROPIEDAD
DE LA UNIVERSIDAD
FRANCISCO GAVIDIA

UNDECIMA EDICION
LA PRESENTE EDICION CONSTA DE 200
EJEMPLARES

MAYO 2015
SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTROAMERICA CENTRO DE
EDUCACION CONTINUA UFG