UNIDAD 1

UTILICEMOS RAZONES TRIGONOMETRICAS

	COMPLEJO EDUCATIVO CANTON TUTULTEPEQUE **GUION DE CLASE** *Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.*	*Grado: 1º año de bachillerato* *Asignatura: Matemática* *Tiempo:_______________* *Periodo: _______________*

UNIDAD 1. UTILICEMOS LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS ***Objetivo de unidad:*** *Aplicar las razones trigonométricas al resolver con interés problemas de la vida cotidiana relacionados con los triángulos rectángulos.*	***Metodología:*** *La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.*

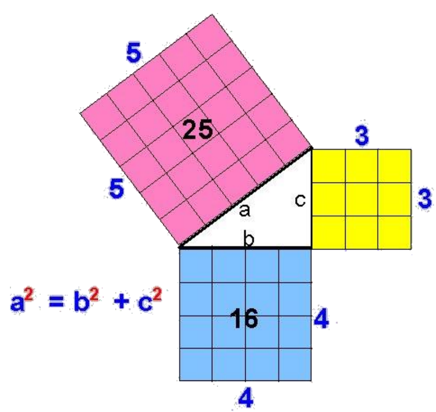
CONTENIDOS CONCEPTUALES	***CONTENIDOS PROCEDIMENTALES***	***CONTENIDOS ACTITUDINALES***
1. Teorema de Pitágoras	✓ *Deducción y aplicación del Teorema de Pitágoras.*	✓ *Seguridad y precisión en la deducción y aplicación del Teorema de Pitágoras.*

Objetivo: *que el alumno sea capaz de:* ✓ *Deducir y aplicar el teorema de Pitágoras a situaciones reales* ✓ *Mostrar seguridad y precisión en la deducción y aplicación del teorema de Pitágoras.*	***Material de Apoyo*** • *Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio.* • *Matemática 1º año de bachillerato Santillana (pioneros)*
Indicadores de logro. ✓ *Deduce y aplica con seguridad y precisión el Teorema de Pitágoras en la resolución de ejercicios y problemas de aplicación.*	***Evaluación:*** *Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.* ✓ *Orden y aseo 5%* ✓ *Puntualidad 5%* ✓ *Desarrollo correcto 90%*

Actividad	Tiempo
1. Bienvenida y asistencia	
2. Presentación del contenido y objetivo de la clase	
3. Exploración de Conocimientos Previos	
4. Introducción a la temática	
5. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
6. Delegación de actividades y cierre	
Tiempo Hora Clase	

Actividad Diagnostica:
Entra al siguiente link
http://rolandotzun.wordpress.com/
Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

Contenido 1. Teorema de Pitágoras

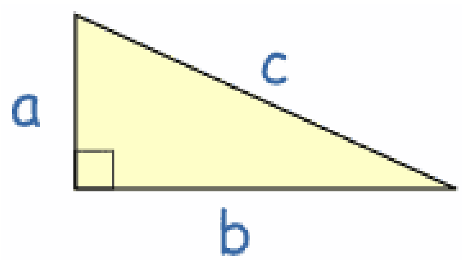


Al filósofo y matemático griego Pitágoras se le atribuye haber descubierto una importante relación entre los lados del triángulo rectángulo.

Pitágoras observo que en un triángulo rectángulo cualquiera podían construirse figuras cuadradas en sus tres lados. Lo curioso es que el área del cuadrado mayor que se construye sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los otros cuadrados que se ubican en los catetos del mismo triangulo rectángulo.

Un caso particular es el siguiente, observa:
En el triángulo dado los catetos tienen por medida 3 y 4 unidades, si se construyen los cuadrados en estos lados entonces tendrán por área 9 y 4 unidades cuadradas respectivamente. Ahora bien, si se construye el cuadrado que se ubica en el lado mayor este tendrá 25 unidades cuadradas. Observe que el cuadrado grande es equivalente a la suma de los otros cuadrados.
Es decir:

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$
$$25 = 16 + 9$$



Generalizando: en un cualquier triangulo rectángulo, se cumple que ***"el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrado de los catetos"***

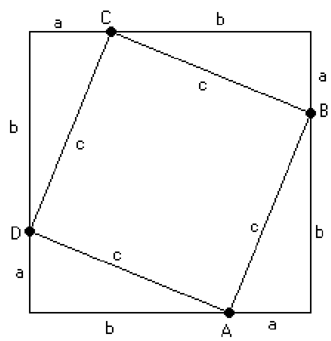
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

Si lo que buscamos es un cateto, entonces se debe de utilizar las siguientes expresiones:

$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$

Demostración Algebraica del Teorema de Pitágoras.

Supongamos que existe un cuadrado, en el cual, cada lado se divide en segmentos de longitud a y b de forma regular, tal como se ilustra en la figura. A partir de ello, se construyen los cuatro triangulo que son congruentes porque sus tres lados, respectivamente, son iguales.



Por definición, la longitud de cada lado del cuadrado grande será $a + b$, por tanto, el área del cuadrado grande será:

$$A_1 = (a + b)(a + b)$$

Observe que los lados del cuadrado que se encuentra ubicado al centro de la figura (y está inclinado) tienen longitud "c". Esto implica que el área de este cuadrado será:

$$A_2 = c^2$$

Observe que también hay cuatro triángulos rectángulos. Ya dijimos que esos los tres triángulos son congruentes porque sus lados respectivos son iguales. Eso implica que cada triangulo tiene un área de:

$$A\Delta = \frac{1}{2}ab$$

Pero como son cuatro triángulos, entonces al sumar el área de estos cuatro triángulos tenemos que:

$$4A\Delta = 2ab$$

Ahora bien, El área del ***cuadrado grande*** *es igual al área del* ***cuadrado inclinado y los 4 triángulos****. Esto lo escribimos así:*

$$(a+b)(a+b)=c^2+2ab$$

Ahora, vamos a operar a ver si nos sale el teorema de Pitágoras:
Empezamos con:

$$(a+b)(a+b)=c^2+2ab$$

Desarrollamos

$$a^2+2ab+b^2=c^2+2ab$$

Restamos "2ab" de los dos lados: $c^2=a^2+b^2$

¡HECHO! Ahora vemos por qué funciona el teorema de Pitágoras, o con otras palabras, vemos la demostración del teorema de Pitágoras.

Ejercicios de ampliación.

- *Ejemplo 1. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 7 y 9 respectivamente.*
  - ✓ *Encuentre el valor de la hipotenusa*
  - ✓ *Calcule el área de dicho rectángulo.*
  - ✓ *Calcule el perímetro de dicho rectángulo.*

- *Ejemplo 2: La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm. Uno de los catetos mide 6 cm.*
  - ✓ *Calcule la medida del otro cateto.*
  - ✓ *Calcule el área del triángulo.*
  - ✓ *Calcule el perímetro del triángulo.*

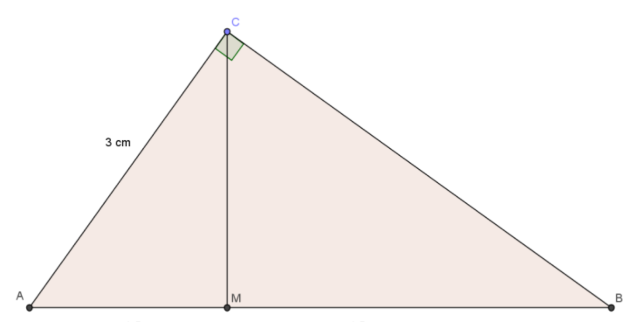
- *Ejemplo 3: Un cuadrado mide 4cm por lado*
  - ✓ *Calcule la medida de su diagonal.*
  - ✓ *Calcule el área del triángulo y cuadrado*
  - ✓ *Calcule el perímetro del triángulo y del cuadrado.*

- *Ejemplo 3. Se sabe que la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 45 mm y uno de sus catetos mide 15 mm*
  - ✓ *Calcule el valor del otro cateto.*
  - ✓ *Calcule el área de dicho triangulo.*
  - ✓ *Calcule el perímetro de dicho triangulo.*

- *Ejemplo 4. Encontrar el área y el perímetro de un triángulo equilátero que mide 40 mm por lado.*

- *Una estrella se ha formado con un cuadrado que mide 2 cm de lado cuadro triángulos construidos en cada uno de sus cuatro lados, encuentra el área y el perímetro de la estrella*

- *El triángulo ΔABC es rectángulo. CM es su altura. Encontrar el área y el perímetro de cada uno de los tres triángulos.*



Problemas de aplicación.

- ***Problemas con escaleras***
  Suponiendo que la pared de un edificio es de 90º al piso, el teorema de Pitágoras puede usarse para encontrar el lado faltante del triángulo recto que forma. Ejemplo: Un escalera de 25 pies (7,6 m) se inclina contra un edificio de tal forma que la base de la escalera es de 7 pies (2 m) alejado del edificio. ¿Qué tan lejos del edificio puede alcanzar la parte alta de la escalera? Respuesta: 24 pies (7,3 m).

- ***Problemas con papalotes***
  Cuando la cuerda de un papalote es estirada muy tirante, forma una diagonal recta entre el piso y la distancia vertical del papalote, los problemas de papalotes toman la forma del teorema de Pitágoras. Ejemplo: Tu papalote está al final de los 85 pies (26m) de la cuerda. En el cielo está directamente sobre un árbol que sabes que está alejado a 84 pies (25,6 m). ¿Qué tan lejos en el cielo está tu papalote? Respuesta: 13 pies (4 m).

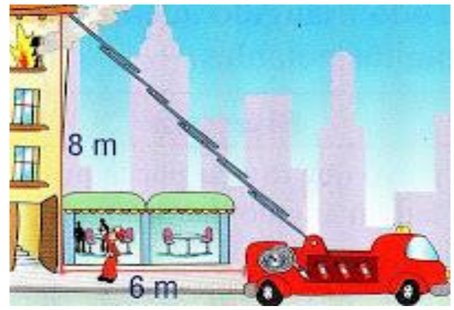
- ***Problemas de arquitectura***
  Dado que los edificios son construidos con ángulos rectos, frecuentemente es importante saber qué tan lejos está la diagonal de un rectángulo dado. Esto también es un problema del teorema de Pitágoras. Ejemplo: Una sección rectangular del concreto que debe verterse, requiere pilares de acero para soportarlo a través de la diagonal. La sección rectangular es de 8' x 15'. ¿Qué tan larga debe de ser la diagonal que lo soporte? Respuesta: 17 pies (5,18 m).

- ***Problemas de cables de amarre***
  Los postes telefónicos por lo general forman un ángulo recto horizontalmente con el piso y son soportados por un cable de amarre. Esta es otra situación que recae en el teorema de Pitágoras. Ejemplo: Un cable de amarre de 13 pies (4 m) está conectado al poste telefónico a 12 pies (3,6 m) de su base. ¿Qué tan lejos de la base del poste telefónico está el cable de amarre conectado al piso? Respuesta: 5 pies (1,5 m).

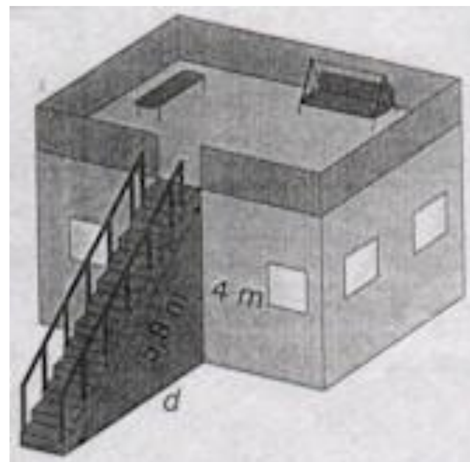
ACTIVIDAD DE INTEGRACION 1.

forme grupos de trabajo de 2 estudiantes como máximo (opcional). Discuta y desarrolle cada uno de los siguientes ejercicios y problemas que a continuación se presentan. Desarrollarlos en su cuaderno de clases y presentarlos individualmente en la fecha y tiempo estipulado por el profesor.

- *¿Cuántos metros se desplegó la escalera telescópica del carro de bomberos, si el edificio tiene una altura de 8 m y el carro se ubicó a 6 m del edificio?*

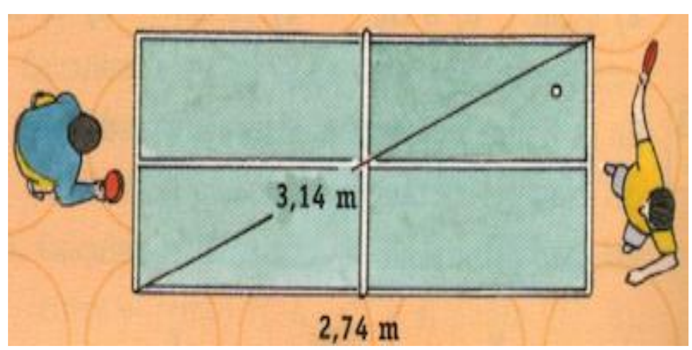


- *Queremos subir a una terraza situada a 4 metro de altura utilizando una escalera que tiene 5,8 m de longitud. ¿Cuál será la distancia máxima desde la pared a la que podremos situar la base de la escalera? La posición de la escalera está representada en la figura siguiente:*



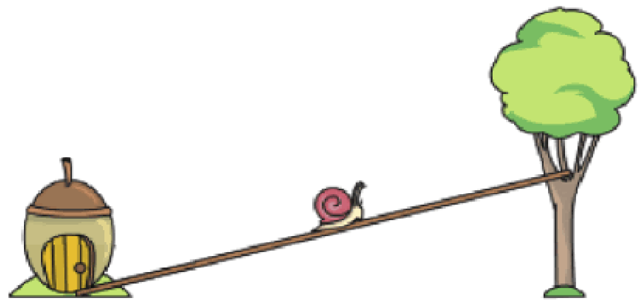
- *Un albañil termino de azulejar la pared de una cocina pero, al verla, duda de que sea exactamente vertical. Para asegurarse, mide la distancia AB y determina que es igual a 69 centímetros. ¿Está bien construida la pared?*

La longitud reglamentaria de una mesa de ping-pong es de 2,74m. se sabe que la diagonal es, aproximadamente, de 3,14m., determinen el ancho reglamentario de una mesa de ping-pong.

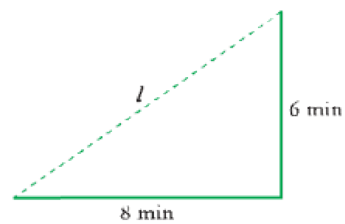


▲▲△ **Un caracol sale todos los días de su escondite y va a comer los brotes tiernos de un árbol. Para ello se desplaza por el suelo durante 8 minutos y luego, sin variar su velocidad, trepa durante 6 minutos por el tronco.**

Pero un buen día se encuentra con que alguien ha colocado un tablón justo desde su guarida hasta la base de la copa del árbol.



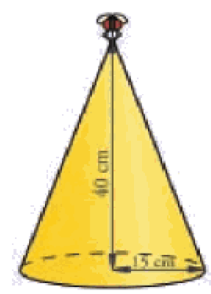
¿Cuánto crees que tardará si decide subir por el tablón? Eso sí, él avanza, siempre, imperturbable, a la misma velocidad.



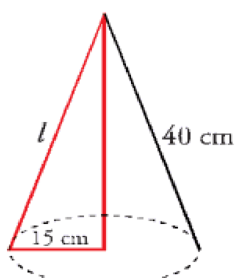
$l = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

Tardará 10 minutos.

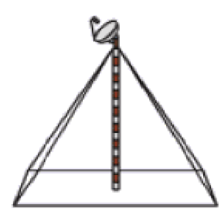
▲△△ **Una mosca está en el vértice de un cucurucho de cartulina con forma de cono. El radio de la base mide 15 cm y la altura es de 40 cm. ¿Cuál es la mayor distancia que puede recorrer la mosca, en línea recta, partiendo del vértice?**

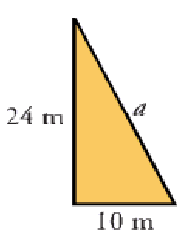


$l = \sqrt{40^2 + 15^2} = 42{,}7$ cm



▲△△ **Para afianzar una antena de 24 m de altura, se van a tender, desde su extremo superior, cuatro tirantes que se amarrarán, en tierra, a 10 m de la base de la torre. ¿Cuántos metros de cable se necesitan para los tirantes?**





Para un tirante se necesitan:

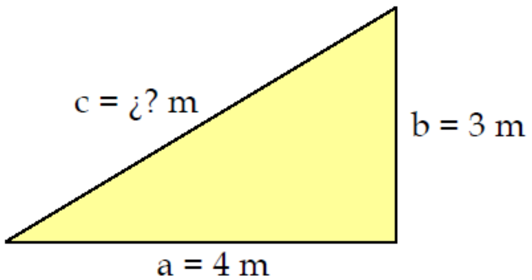
$a^2 = 24^2 + 10^2 = 676$

$a = 26$ m

$26 \cdot 4 = 104$

Por tanto, necesitaremos 104 m de cable.

1. Para el siguiente triángulo rectángulo, calcula el lado desconocido **c**.



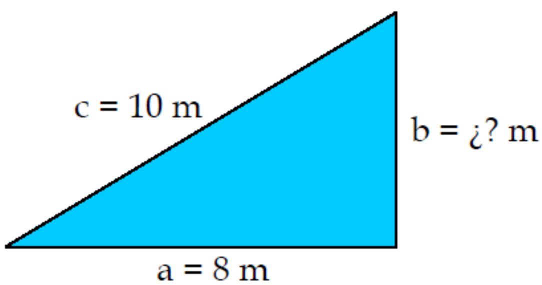
Solución:

Usamos el Teorema de Pitágoras, el cuál está dado por: $a^2+b^2=c^2$

Buscamos **c**. Sustituyamos los datos dados:

$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow 4^2+3^2=c^2 \Rightarrow c^2=16+9 \Rightarrow c=\sqrt{25} \Rightarrow c=5\ \text{m}$.

2. Para el siguiente triángulo rectángulo, calcula el lado desconocido b.



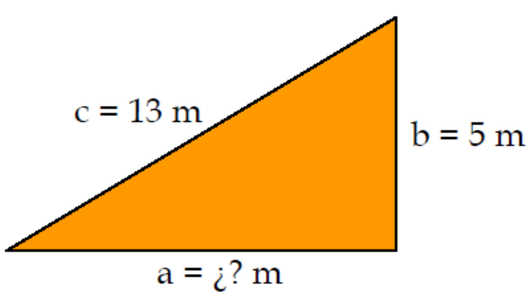
Solución:

Usamos el Teorema de Pitágoras, el cuál está dado por: $a^2+b^2=c^2$

Buscamos **b**. Sustituyamos los datos dados:

$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow 8^2+b^2=10^2 \Rightarrow b^2=100-64 \Rightarrow b=\sqrt{36} \Rightarrow b=6\ \text{m}$.

3. Para el siguiente triángulo rectángulo, calcula el lado desconocido a.



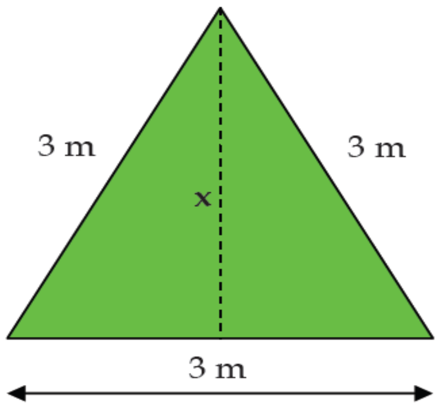
Solución:

Usamos el Teorema de Pitágoras, el cuál está dado por: $a^2+b^2=c^2$

Buscamos **a**. Sustituyamos los datos dados:

$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow a^2+5^2=13^2 \Rightarrow a^2=169-25 \Rightarrow a=\sqrt{144} \Rightarrow a=12\ \text{m}$.

4. Para el siguiente triángulo equilátero, halla el valor de x, el perímetro y el área.

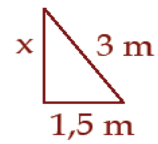


Solución:

El perímetro es la suma de los lados. En este caso:

P = 3 + 3 + 3 = 9 m

Calculemos **x**:



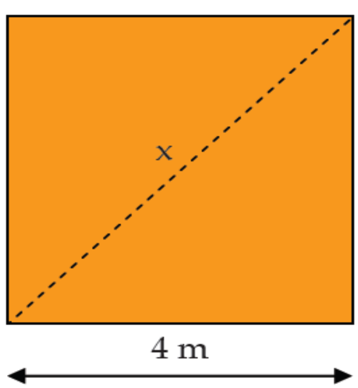
$$x^2 + 1,5^2 = 3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{9 - 2,25} = 2,6 \text{ m}$$

Calculemos **el área**:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{3 \cdot x}{2} = \frac{3 \cdot 2,6}{2} = 3,9 \text{ m}^2$$

5. Para el siguiente cuadrado, halla x, el perímetro y el área.



Solución:

El perímetro es la suma de los lados. En este caso:

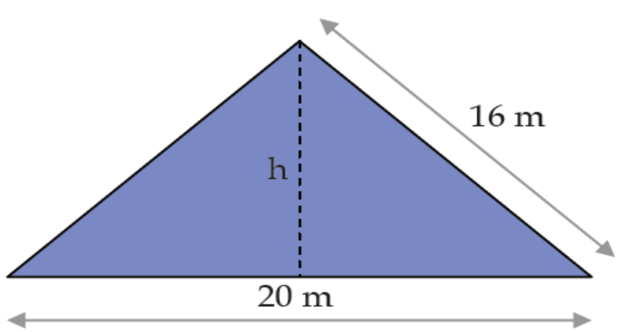
P = 4 + 4 + 4 + 4 = 16 m

Calculemos **x**:

$$x^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow x = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2} \text{ m}$$

Por último, calculemos el área: $A = 4 \cdot 4 = 16 \text{ m}^2$

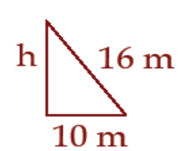
6. Para el siguiente triángulo isósceles, calcula el perímetro, la altura y el área.



Solución:

El perímetro es la suma de los lados. En este caso:

P = 20 + 16 + 16 = 52 m

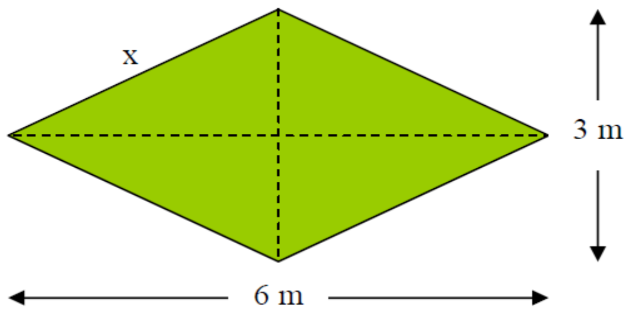


La altura, **h**, está dada por:

$$16^2 = 10^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{16^2 - 10^2} = 12,49 \text{ m}$$

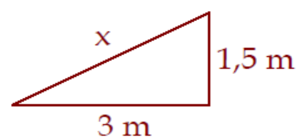
El área es: $A = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{20 \cdot h}{2} = \dfrac{20 \cdot 12,49}{2} = 124,9 \text{ m}^2$

7. Para el siguiente rombo, halla x, el perímetro y el área.



Solución:

El valor de **x** está dado por:

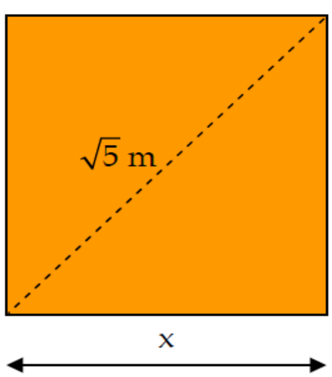


$$x^2 = 3^2 + 1,5^2 \Rightarrow x = \sqrt{9 + 2,25} = 3,35 \text{ m}$$

El perímetro es entonces: P = 4 · 3,35 = 13,4.

El área del rombo es 4 veces el siguiente área: $A = \dfrac{3 \cdot 1,5}{2} = 2,25 \text{ m}^2$, es decir: 4A = 9 m².

8. Para el siguiente cuadrado, halla x, el perímetro y el área.



Solución:

Hallamos x:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \left(\sqrt{5}\right)^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow \left(\sqrt{5}\right)^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{5}{2}} \text{ m}$$

El perímetro es la suma de los lados. En este caso:

$$P = 4 \cdot x = 4 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 5}{2}} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ m}$$

El área del cuadrado viene dado por: $A = x^2 = \left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)^2 = \dfrac{5}{2} \text{ m}^2$

	COMPLEJO EDUCATIVO CANTON TUTULTEPEQUE **GUION DE CLASE** *Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.*	*Grado: 1º año de bachillerato* *Asignatura: Matemática* *Tiempo:_______________* *Periodo: _______________*

UNIDAD 1. UTILICEMOS LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS ***Objetivo de unidad:*** *Aplicar las razones trigonométricas al resolver con interés problemas de la vida cotidiana relacionados con los triángulos rectángulos.*	***Metodología:*** *La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.*

CONTENIDOS CONCEPTUALES	***CONTENIDOS PROCEDIMENTALES***	***CONTENIDOS ACTITUDINALES***
*2. **Razones trigonométricas*** *seno x, coseno x, tangente x, cotangente x, secante x, cosecante x*	✓ *Construcción de las razones trigonométricas* ✓ *Solución de ejercicios y problemas aplicando las razones trigonométricas.*	✓ *Confianza al construir las razones trigonométricas.* ✓ *Seguridad al solucionar ejercicios de razones trigonométricas.* ✓ *Colabora con sus compañeros y compañeras al resolver problemas utilizando las razones trigonométricas.*

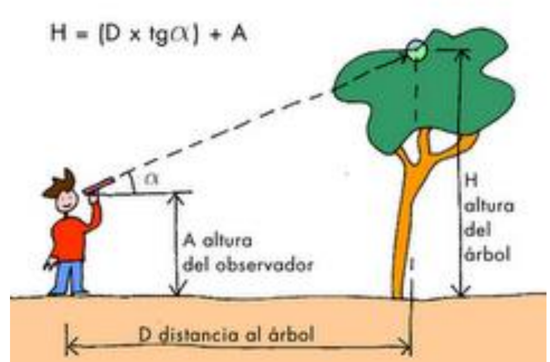
Objetivo: que el alumno sea capaz de: ✓ *Construir las razones trigonométricas: seno x, coseno x, tangente x, cotangente x, secante x, cosecante x.* ✓ *Solucionar ejercicios y problemas aplicando las razones trigonométricas.*	***Material de Apoyo*** • *Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio.* • *Matemática 1º año de bachillerato Santillana (pioneros)*
Indicadores de logro. ✓ *Muestra seguridad y precisión en la construcción de las razones trigonométricas: seno x, coseno x, tangente x, cotangente x, secante x, cosecante x, a partir de las razones geométricas.* ✓ *Muestra seguridad y precisión al resolver ejercicios y problemas aplicando las razones trigonométricas.*	***Evaluación:*** *Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.* ✓ *Orden y aseo 5%* ✓ *Puntualidad 5%* ✓ *Desarrollo correcto 90%*

Actividad	Tiempo
1. Bienvenida y asistencia	
2. Presentación del contenido y objetivo de la clase	
3. Exploración de Conocimientos Previos	
4. Introducción a la temática	
5. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
6. Delegación de actividades y cierre	
Tiempo Hora Clase	

Actividad Diagnostica:
Entra al siguiente link
http://rolandotzun.wordpress.com/
Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

Contenido 2. Razones Trigonométricas.

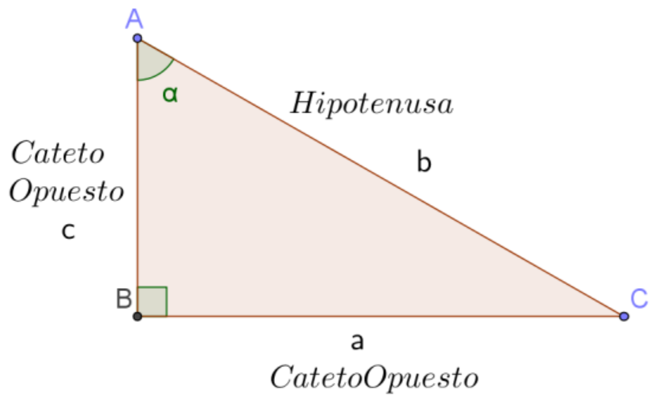
La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es "la medición de los triángulos". Se deriva del vocablo griego "triángulo" + "medida". La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos.



Para esto se vale de las razones trigonométricas, las cuales son utilizadas frecuentemente en cálculos técnicos.

Deducción de las Razones Trigonométricas.

Supongamos que existe un triángulo ΔABC que es rectángulo (tiene un ángulo de 90º) como se ilustra en la figura. Si theta (α) es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, entonces con respecto a "α" se pueden establecer seis razones entre los tres lados de dicho triangulo, los cuales sirven de base para definir las seis razones trigonométricas que se enuncian a continuación:

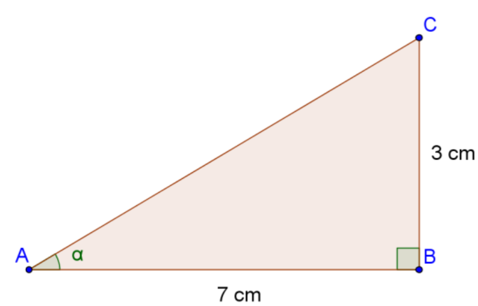


Razón trigonométrica	Definición	En la figura
sen α	$\frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{a}{c}$
cos α	$\frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{b}{c}$
tg α	$\frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$	$\frac{a}{b}$
ctg α	$\frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opuesto a } \alpha}$	$\frac{b}{a}$
sec α	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$	$\frac{c}{b}$
cosec α	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha}$	$\frac{c}{a}$

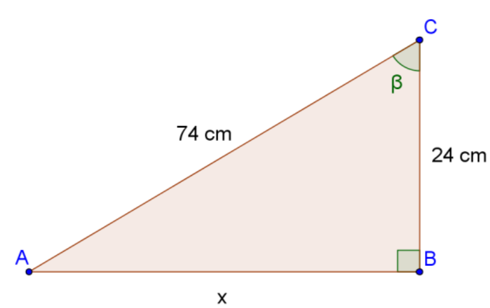
La posición espacial del triángulo puede variar, por lo cual es necesario hacer varios ensayos

Problemas de ampliación.

- *Ejemplo 1. Dado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 7cm y 3cm. Encuentre el valor de las seis razones trigonométricas para el Angulo α.*



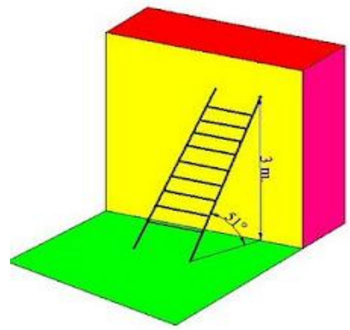
- *Ejemplo 2. Calcule el valor del cateto faltante y luego obtenga el valor de las seis razones trigonométricas correspondientes para el ángulo.*



- *Ejemplo 3. Si se sabe que* $tan\theta = \frac{4}{3}$ *encontrar el valor de las seis razones trigonométricas restantes.*
- *Ejemplo 4. Si se sabe que* $csc\theta = \frac{11}{3}$ *encontrar el valor de las restantes razones trigonométricas.*
- *Ejemplo 5. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 25 mm y 40 mm. Calcular las razones trigonométricas del ángulo menor. (Teorema en un triángulo cualquiera a mayor lado se opone mayor ángulo)*

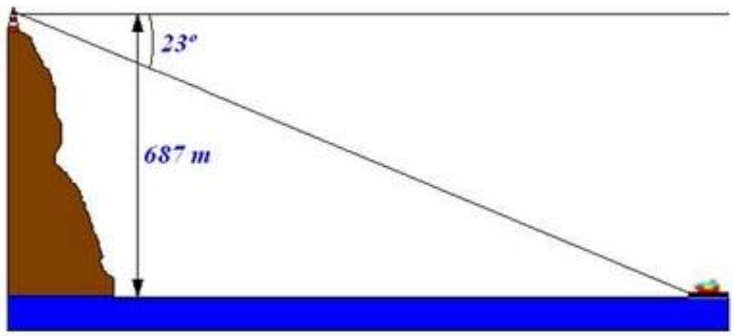
PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. *El extremo superior de una escalera está apoyada en una pared de forma que alcanza una altura de 3m. Si forma un ángulo 51º con el suelo, ¿Cuál es el largo de la escalera?*



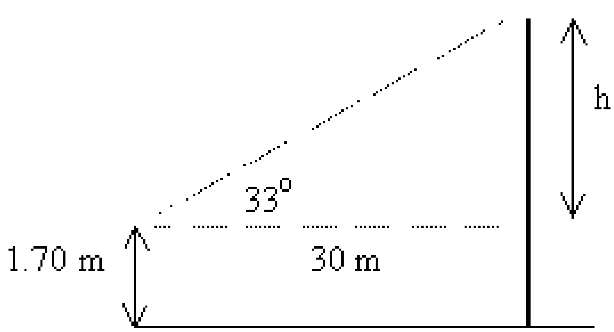
$$sen\ 51^{o} = \frac{3}{c}$$
$$c\,sen\ 51^{o} = 3$$
$$c = \frac{3}{sen\ 51^{o}}$$
$$c = 3{,}86$$

Un observador se encuentra en un faro al pie de un acantilado. Está a 687m sobre el nivel del mar, desde este punto observa un barco con un ángulo depresión de 23º. Se desea saber a qué distancia de la base del acantilado se encuentra el barco.



$$\tan 23^{o} = \frac{d}{h}$$
$$\tan 23^{o} = \frac{d}{687}$$
$$687 \tan 23^{o} = d$$
$$291.61 = d$$

2. *Un observador tiene un nivel visual de 1.70 m de altura, y se encuentra a 30 m de una antena. Al ver la punta de la antena, su vista forma un ángulo de elevación de 33° ¿Cuál es la altura de la antena? Solución: Utilizamos la siguiente figura, en la cual calcularemos h primero.*



$\tan 33^{\circ} = h/30$

$h = 30 \tan 33^{\circ}$

$h = 19.48$ m

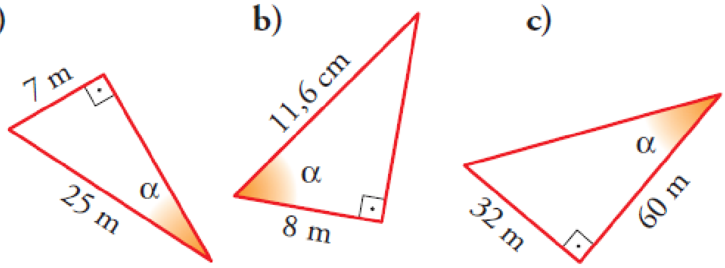
Por lo tanto, la altura de la antena = h + el nivel visual del observador. De modo que la altura de la antena es: 19.48 + 1.70 = 21.18 m.

ACTIVIDAD DE INTEGRACION 2.

Forme grupos de trabajo de 2 estudiantes como máximo (opcional). Discuta y desarrolle cada uno de los siguientes ejercicios y problemas que a continuación se presentan. Desarrollarlos en su cuaderno de clases y presentarlos individualmente en la fecha y tiempo estipulado por el profesor.

Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de estos triángulos:

a) **b)** **c)**



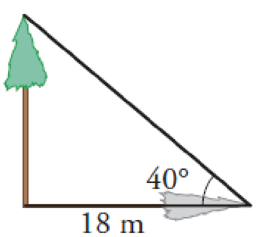
Halla la medida de los lados y ángulos desconocidos en los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A} = 90°$):

a) $b = 7$ cm $\quad c = 18$ cm **b)** $a = 25$ cm $\quad b = 7$ cm

c) $b = 18$ cm $\quad \hat{B} = 40°$ **d)** $c = 12{,}7$ cm $\quad \hat{B} = 65°$

e) $a = 35$ cm $\quad \hat{C} = 36°$

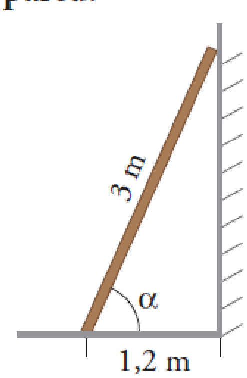
Cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?



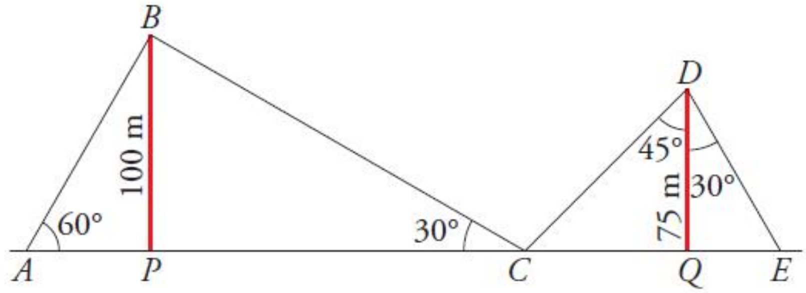
$$tg\ 40° = \frac{x}{18} \rightarrow x = 15{,}1 \text{ m mide el árbol.}$$

Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?

$$cos\ \alpha = \frac{1{,}2}{3} = 0{,}4 \rightarrow \alpha = 66°\ 25'\ 19''$$



Dos antenas de radio están sujetas al suelo por cables tal como indica la figura. Calcula la longitud de cada uno de los tramos de cable y la distancia *AE*.



$sen\ 60° = \dfrac{100}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} \approx 115,47$ m $\qquad tg\ 60° = \dfrac{100}{\overline{AP}} \rightarrow \overline{AP} \approx 57,74$ m

$sen\ 30° = \dfrac{100}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = 200$ m $\qquad tg\ 30° = \dfrac{100}{\overline{PC}} \rightarrow \overline{PC} \approx 173,21$ m

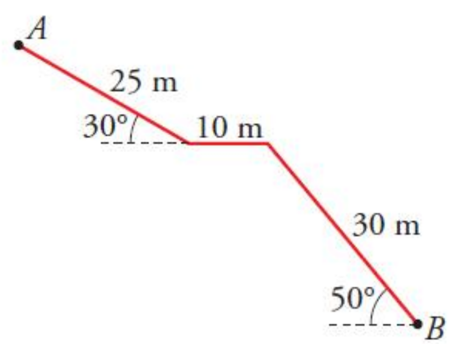
$cos\ 45° = \dfrac{75}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{CD} \approx 106,07$ m $\qquad tg\ 45° = \dfrac{\overline{CQ}}{75} \rightarrow \overline{CQ} = 75$ m

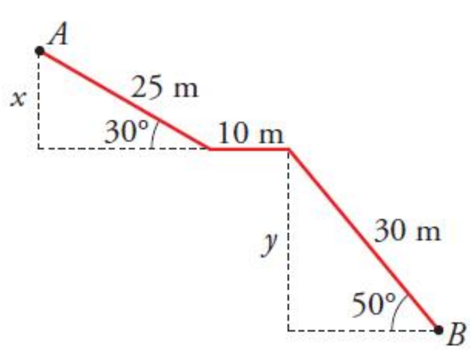
$cos\ 30° = \dfrac{75}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{DE} \approx 86,6$ m $\qquad tg\ 30° = \dfrac{\overline{QE}}{75} \rightarrow \overline{QE} \approx 43,3$ m

$\overline{AE} = 57,74 + 173,21 + 75 + 43,3 = 349,25$ m

Una escalera para acceder a un túnel tiene la forma y las dimensiones de la figura.

Calcula la profundidad del punto *B*.





$sen\ 30° = \dfrac{x}{25} \rightarrow x = 12,5$ m

$sen\ 50° = \dfrac{y}{30} \rightarrow y \approx 22,98$ m

Profundidad: $12,5 + 22,98 = 35,48$ m

	COMPLEJO EDUCATIVO CANTON TUTULTEPEQUE **GUION DE CLASE** *Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.*	*Grado: 1º año de bachillerato* *Asignatura: Matemática* *Tiempo:_______________* *Periodo: _______________*

UNIDAD 1. UTILICEMOS LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS ***Objetivo de unidad:*** *Aplicar las razones trigonométricas al resolver con interés problemas de la vida cotidiana relacionados con los triángulos rectángulos.*	***Metodología:*** *La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.*

CONTENIDOS CONCEPTUALES	***CONTENIDOS PROCEDIMENTALES***	***CONTENIDOS ACTITUDINALES***
3. Razones trigonométricas para ángulos de 30º, 45º y 60º	✓ *Determinación de los valores para las funciones trigonométricas de ángulos de 30º, 45º y 60º.* ✓ *Resolución de problemas utilizando las razones trigonométricas para ángulos de 30º, 45º y 60º.*	✓ *Precisión al determinar los valores para las funciones trigonométricas de ángulos de 30º, 45º y 60º.* ✓ *Seguridad y precisión en la resolución de problemas utilizando razones trigonométricas.*

Objetivo: *que el alumno sea capaz de:* ✓ *Determinación de los valores para las funciones trigonométricas de ángulos de 30º, 45º y 60º.* ✓ *Resolución de problemas utilizando las razones trigonométricas para ángulos de 30º, 45º y 60º.*	***Material de Apoyo*** • *Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio.* • *Matemática 1º año de bachillerato Santillana (pioneros)*
Indicadores de logro. ✓ *Determina con precisión los valores para las funciones trigonométricas de ángulos de 30º, 45º y 60º.*	***Evaluación:*** *Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.* ✓ *Orden y aseo 5%* ✓ *Puntualidad 5%* ✓ *Desarrollo correcto 90%*

Actividad	Tiempo
1. Bienvenida y asistencia	
2. Presentación del contenido y objetivo de la clase	
3. Exploración de Conocimientos Previos	
4. Introducción a la temática	
5. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
6. Delegación de actividades y cierre	
Tiempo Hora Clase	

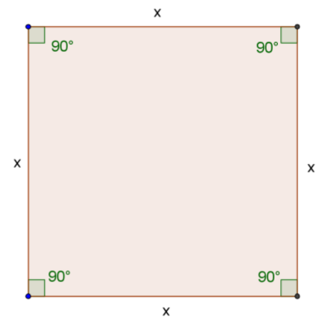
Actividad Diagnostica:
Entra al siguiente link
http://rolandotzun.wordpress.com/
Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

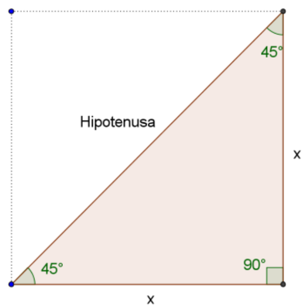
Contenido 3. Razones trigonométricas para ángulos de 30º, 45º y 60º

Triángulos notables: *Se conocen con el nombre de triángulos notables a los triángulos rectángulos que cumplen con la condición de que alguno de sus ángulos agudos mide 30º, 45º o 60º.*
Los triángulos notables son dos y nos ayudan a obtener los valores de las funciones trigonométricas correspondientes a 30º, 45º y 60º. Esto sin necesidad de hacer uso de calculadora.

Primer triangulo Notable 45º (Deducción)

Si se tiene un cuadrado cualquiera de lado x entonces:





Al trazar una diagonal se forma un triángulo rectángulo de la manera siguiente:

Al hacer uso del teorema de Pitágoras resulta que:

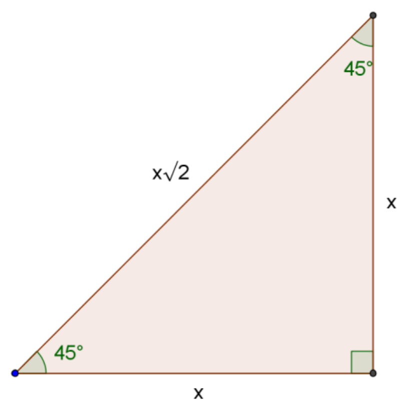
$(Hipotenusa)^2 = x^2 + x^2$

$(Hipotenusa)^2 = 2x^2$

$\sqrt{(Hipotenusa)^2} = \sqrt{2x^2}$

$Hipotenusa = x\sqrt{2}$

El triángulo completo es entonces:



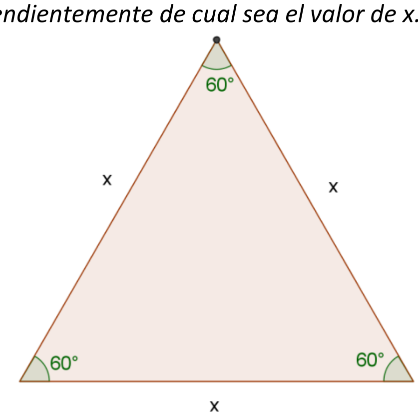
Basándonos en este triángulo notable tenemos:

$sen(45º) = \frac{x}{x\sqrt{2}} \Rightarrow sen(45º) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $cos(45º) = \frac{x}{x\sqrt{2}} \Rightarrow cos(45º) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $tan(45º) = \frac{x}{x} \Rightarrow sen(45º) = 1$	$csc(45º) = \frac{x\sqrt{2}}{x} \Rightarrow csc(45º) = \sqrt{2}$ $sec(45º) = \frac{x\sqrt{2}}{x} \Rightarrow sec(45º) = \sqrt{2}$ $cot(45º) = \frac{x}{x} \Rightarrow cot(45º) = 1$

Podemos observar que estos resultados son los mismos independientemente de cual sea el valor de x.

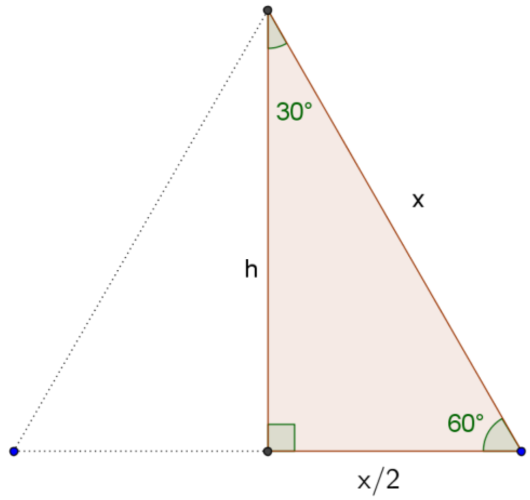
Segundo triangulo Notable (30º y 60º)

Se tiene un triángulo rectángulo de lado x



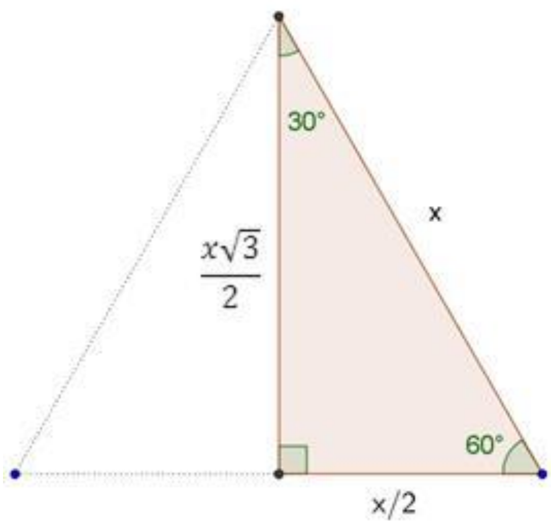
Entonces al trazar la altura este triángulo queda dividido en dos triángulos rectángulos iguales.

Por el teorema de Pitágoras:



$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2$$
$$h^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$
$$h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{3x^2}{4}$$
$$\sqrt{h^2} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}}$$
$$h = \frac{\sqrt{3x^2}}{\sqrt{4}}$$
$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

El triángulo completo es:

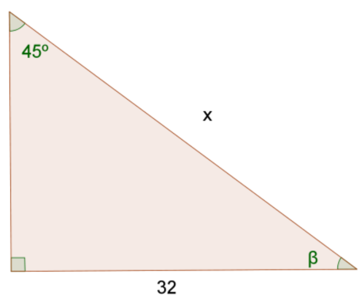


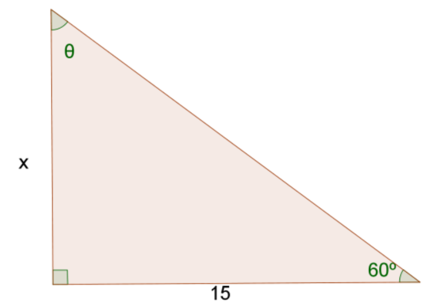
Para ángulos de 30º		***Para ángulos de 60º***	
$sen(30º) = \frac{1}{2}$ $\cos(30º) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan(30º) = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\csc(30º) = 2$ $\sec(30º) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\cot(30º) = \sqrt{3}$	$sen(60º) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos(60º) = \frac{1}{2}$ $\tan(60º) = \sqrt{3}$	$\csc(60º) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\sec(60º) = 2$ $\cot(60º) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Problemas de ampliación.
Sin hacer uso de la calculadora, reduzca a su mínima expresión las siguientes expresiones trigonométricas.

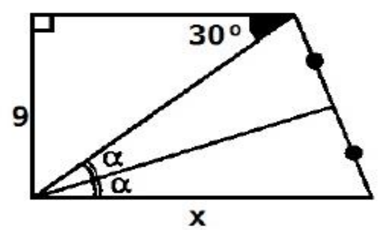
- $cos^2(60º) + tan^2(30º)$
- $cos^2(45º) - cot^2(30º)$
- $6cos(60º) + 4sen(30º)$
- $cos^4(45º) - cos^2(30º)$
- $\frac{4sen^2(60º)+2cos^2(45º)}{3cos^2(60º)+sen^2(30º)}$
- $\frac{sen^2(30º)+cos^2(45º)}{tan^2(60º)-cot^2(45º)}$

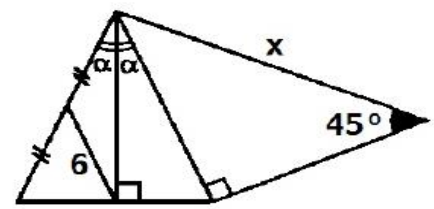
Para el triángulo dado encontrar en valor del angulo que falta y también el valor de x.

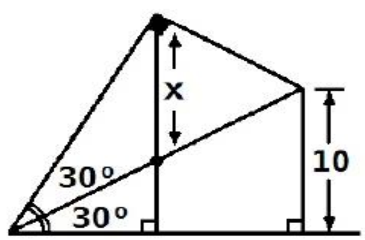


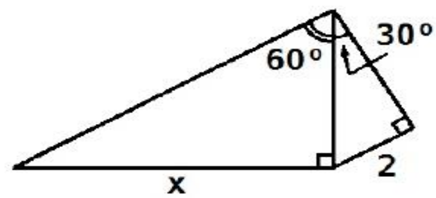


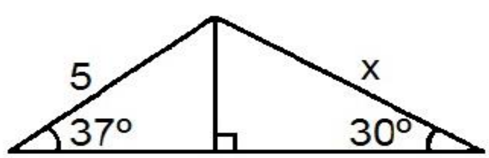
Calcular el valor de x en cada caso.

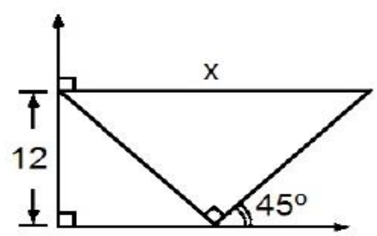


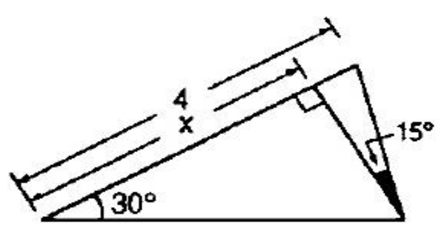


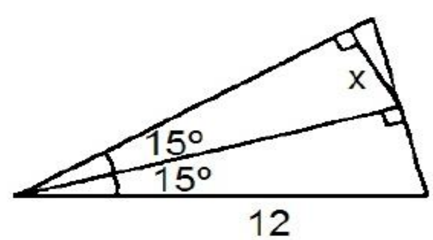


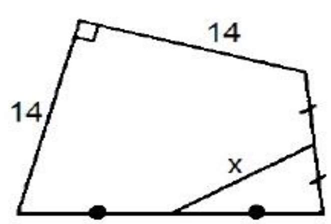


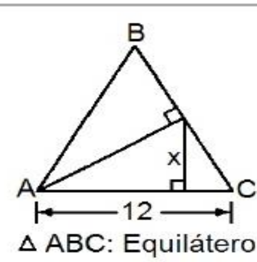












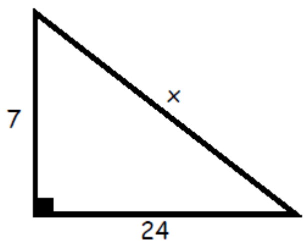
ACTIVIDAD DE INTEGRACION 3.

Forme grupos de trabajo de 2 estudiantes como máximo (opcional). Discuta y desarrolle cada uno de los siguientes ejercicios y problemas que a continuación se presentan. Desarrollarlos en su cuaderno de clases y presentarlos individualmente en la fecha y tiempo estipulado por el profesor.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

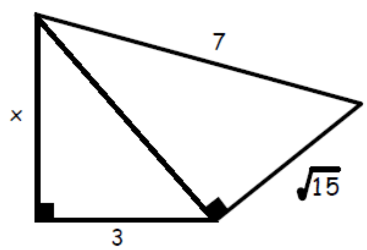
1. Hallar "x" :

   a) 7
   b) 24
   c) 31
   d) 25
   e) 19



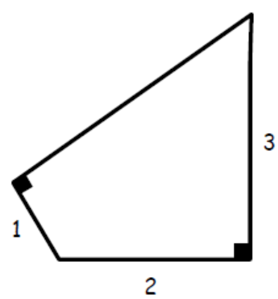
2. Hallar "x"

   a) 4
   b) 5
   c) 6
   d) $\sqrt{15}$
   e) $\sqrt{12}$



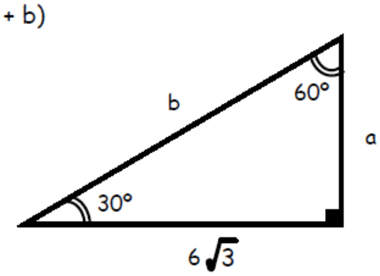
3. Hallar "x"

   a) 4
   b) 5
   c) $2\sqrt{3}$
   d) $3\sqrt{2}$
   e) $\sqrt{13}$



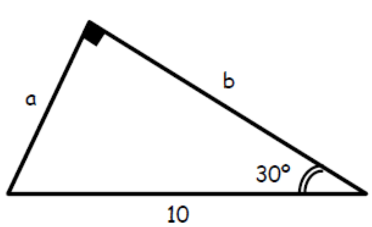
4. Calcular : (a + b)

   a) 6
   b) 12
   c) 18
   d) 24
   e) $6\sqrt{3}$



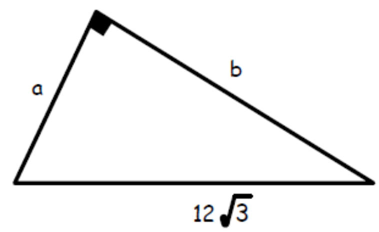
5. Hallar : (a + b)

   a) 15
   b) $5\left(\sqrt{3}+1\right)$
   c) 10
   d) 20
   e) 5

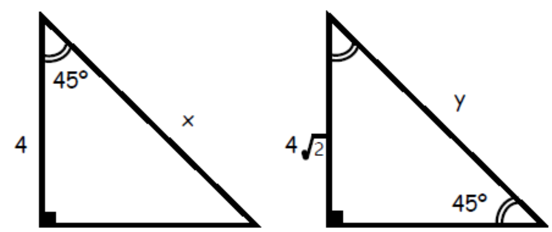


6. Hallar (a + b)

   a) $6\left(\sqrt{3}+1\right)$
   b) $6\left(\sqrt{3}+2\right)$
   c) $6\left(\sqrt{3}+3\right)$
   d) 12
   e) 24



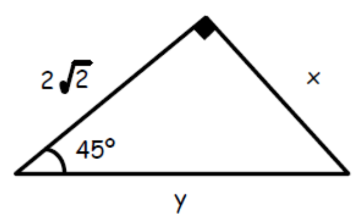
7. Hallar : x e y



   a) $4\sqrt{2}$ y 4 b) $4\sqrt{2}$ y 8 c) $4\sqrt{2}$ y 12
   d) 4 y $4\sqrt{2}$ e) 4 y 8

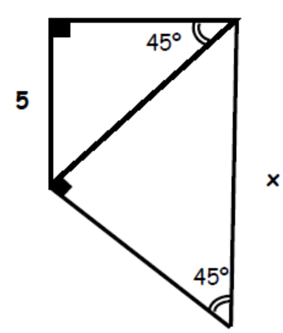
8. Hallar : (x + y)

   a) 2
   b) 4
   c) 8
   d) $4\sqrt{2}$
   e) $2(\sqrt{2}+2)$



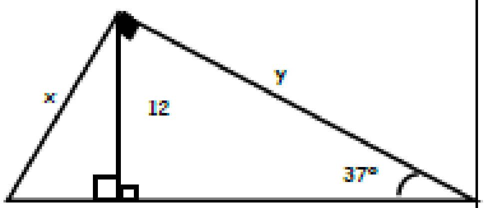
9. Hallar "x"

   a) 5
   b) 10
   c) $5\sqrt{2}$
   d) $10\sqrt{2}$
   e) 20



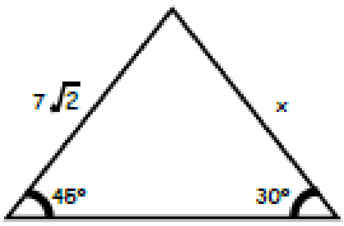
10. Hallar "x":

a) 20
b) 15
c) 25
d) 47
e) 35



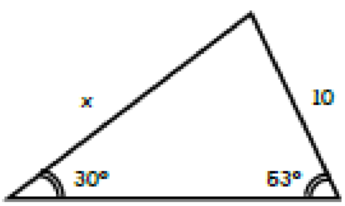
11. Hallar "x":

a) 7
b) 14
c) $7\sqrt{2}$
d) $7\sqrt{6}$
e) 8



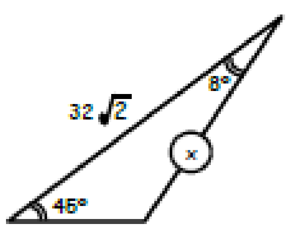
12. Hallar "x":

a) 8
b) 16
c) 20
d) $10\sqrt{3}$
e) 15



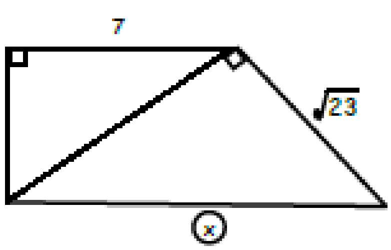
13. Hallar "x"

a) 32
b) 40
c) 24
d) 16
e) 25



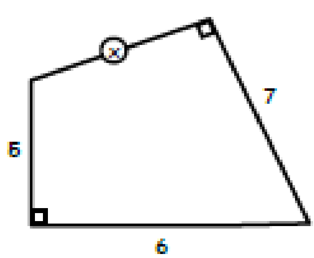
14. Hallar "x"

a) 6
b) 7
c) 8^3
d) 9
e) 10



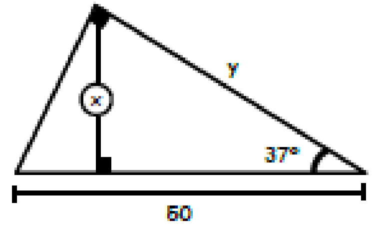
15. Hallar:

a) 8
b) 4
c) $2\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{2}$
e) 6



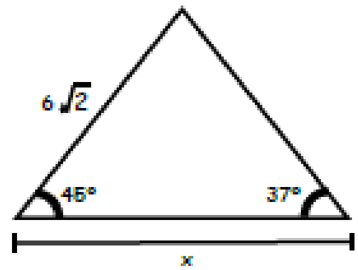
16. Calcular "x" :

a) 4
b) 32
c) 218
d) 40
e) 30



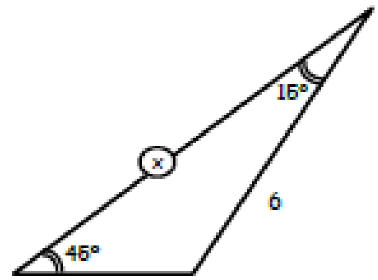
17. Hallar "x" :

a) 6
b) 8
c) 14
d) 12
e) 10



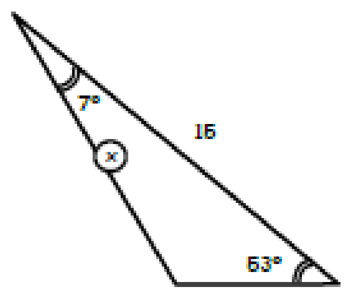
18. Calcular "x" :

a) $3\sqrt{3}$
b) $3\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{6}$
d) $6\sqrt{3}$
e) $5\sqrt{3}$

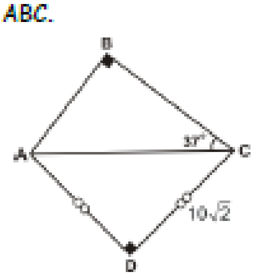


19. Calcular "x":

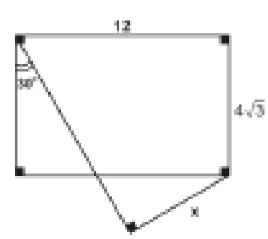
a) $4\sqrt{3}$
b) $5\sqrt{3}$
c) $6\sqrt{3}$
d) $7\sqrt{3}$
e) $8\sqrt{3}$



20. Según la figura mostrada, calcular el perímetro del triángulo *ABC*.



21. Hallar "x" en la figura mostrada.



22. En un triángulo rectángulo isósceles tiene por perímetro $8 + 8\sqrt{2}$. Entonces su hipotenusa medirá

A) $4\sqrt{2}$ B) 6C) $6\sqrt{2}$ D) 8

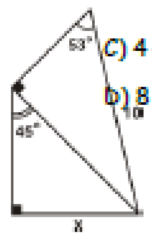
23. En la figura mostrada, calcular "x".

A) 4

B) $8\sqrt{2}$

C) $4\sqrt{2}$

D) 8



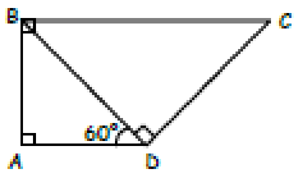
24. En la figura, $\overline{AB}$ mide $4\sqrt{3}$ m. Calcular la longitud de $\overline{CD}$.

A) 24 m

B) 8 m

C) 4 m

D) $8\sqrt{3}$ m



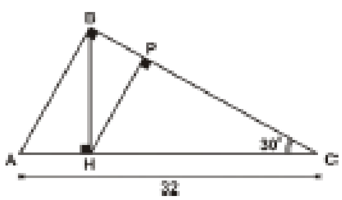
25. Calcular "HP" de la figura mostrada, si: $AC = 32$.

A) 12

B) 15

C) 10

D) 9



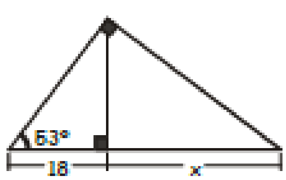
26. Hallar "x" de la figura.

A) 30

B) 32

C) 23

D) 24



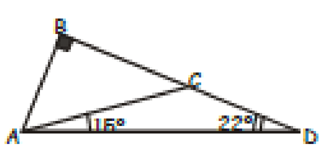
27. Si: $AB = 18$, calcular "BC".

A) 25

B) 30

C) 24

D) 32



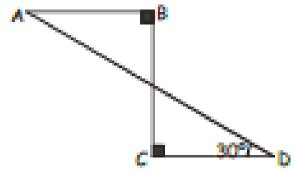
28. En la figura, calcular "AD", sabiendo que: $BC = 9$.

A) 18

B) 15

C) 16

D) 12



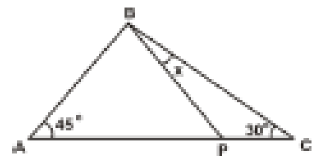
29. Hallar "x", si: $BC = AP$

A) 16°

B) 18°

C) 20°

D) 15°



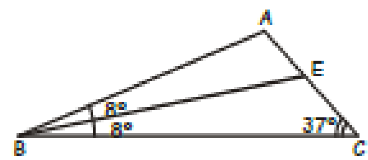
30. En la siguiente figura, calcular "AE", si: $BC = 20$.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4



	COMPLEJO EDUCATIVO CANTON TUTULTEPEQUE **GUION DE CLASE** *Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.*	*Grado: 1º año de bachillerato* *Asignatura: Matemática* *Tiempo:_______________* *Periodo: _______________*

UNIDAD 1. UTILICEMOS LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS ***Objetivo de unidad:*** *Aplicar las razones trigonométricas al resolver con interés problemas de la vida cotidiana relacionados con los triángulos rectángulos.*	***Metodología:*** *La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.*

CONTENIDOS CONCEPTUALES	***CONTENIDOS PROCEDIMENTALES***	***CONTENIDOS ACTITUDINALES***
4. Ángulo de elevación y de depresión.	✓ *Identificación y explicación del ángulo de elevación y depresión a partir de situaciones reales.* ✓ *Aplicación y resolución de ejercicios y problemas aplicando el ángulo de depresión.*	✓ *Seguridad al Identificar y explicar en qué consiste el ángulo de elevación y depresión a partir de situaciones reales.* ✓ *Seguridad y precisión en la aplicación y resolución de ejercicios y problemas aplicando el ángulo de depresión.*

Objetivo: *que el alumno sea capaz de:* ✓ *Identificar y explicar el concepto del ángulo de elevación y depresión a partir de situaciones reales.* ✓ *Aplicar y Resolver ejercicios y problemas aplicando el ángulo de elevación y depresión.*	***Material de Apoyo*** • *Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio.* • *Matemática 1º año de bachillerato Santillana (pioneros)*
Indicadores de logro. ✓ *Identifica y explica con esmero y seguridad el ángulo de elevación a partir de situaciones reales.* ✓ *Aplica con confianza, el ángulo de elevación en la solución de ejercicios.* ✓ *Resuelve problemas, con confianza, utilizando el ángulo de elevación.* ✓ *Identifica y explica con seguridad el ángulo de depresión en situaciones reales.* ✓ *Aplica, con seguridad, el ángulo de depresión en la solución de ejercicios.* ✓ *Resuelve problemas, con seguridad, utilizando el ángulo de depresión.*	***Evaluación:*** *Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.* ✓ *Orden y aseo 5%* ✓ *Puntualidad 5%* ✓ *Desarrollo correcto 90%*

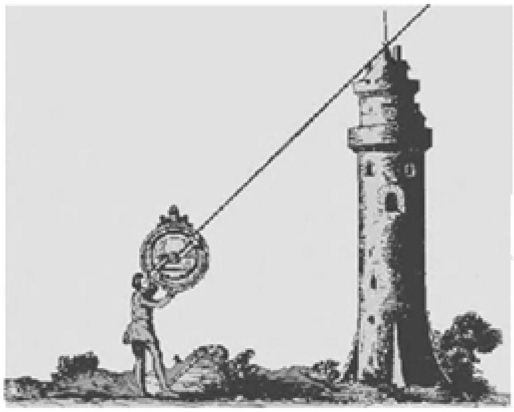
Actividad	Tiempo
7. Bienvenida y asistencia	
8. Presentación del contenido y objetivo de la clase	
9. Exploración de Conocimientos Previos	
10. Introducción a la temática	
11. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
12. Delegación de actividades y cierre	
Tiempo Hora Clase	

Actividad Diagnostica:
Entra al siguiente link
http://rolandotzun.wordpress.com/
Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

Contenido 4. Angulo de Elevación y Angulo de Depresión.

Si se desea realizar alguna observación ya sea de objetos o puntos determinados del espacio, se utiliza dos términos muy comunes: ángulos de elevación y ángulo de depresión. Estos ángulos son formados por dos líneas imaginarias llamadas: línea visual o línea de visión y la línea horizontal. La línea de *visión une el ojo de un observador con el lugar observado.*

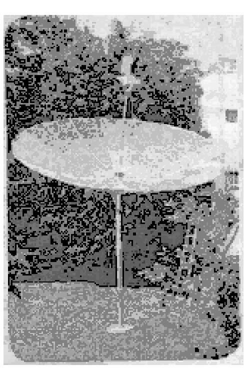
INTRODUCCIÓN :



En nuestra vida diaria observamos objetos e indicamos sus posiciones utilizando referencias que nos puedan permitir una mayor precisión al momento de ubicamos , en el capítulo que ahora vamos a estudiar definiremos en un mismo plano tanto al observador como el objeto que deseamos observar. Así también definiremos ángulos que nos van a permitir visualizar determinados puntos del objeto en consideración. Primero lo haremos en planos verticales. Es así que es necesario conocer de antemano algunos términos que luego vamos a utilizar tales como Línea Vertical (línea que coincide con la dirección que marca la plomada), Plano Vertical (Es aquel plano que contiene a toda la recta vertical), Línea Visual (o Linea de mira, es aquella línea imaginaria que une el ojo del observador con el punto a observarse).

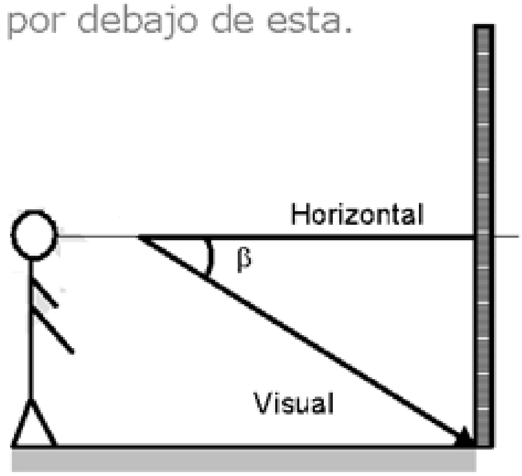
Una de las aplicaciones de los ángulos verticales son las ANTENAS PARABÓLICAS, porque éstas barren ángulos verticales y horizontales.

Las antenas parabólicas tienen como función la radiación o la recepción de ondas electromagnéticas, su elemento reflector parabólico concentra la energía en el punto focal, obteniendo así su característica de transmisión o recepción unidireccional según sea su aplicación. Con la antena parabólica podemos obtener imágenes y sonido en directo de otros países (partidos de fútbol, conferencias, noticias, etc.).



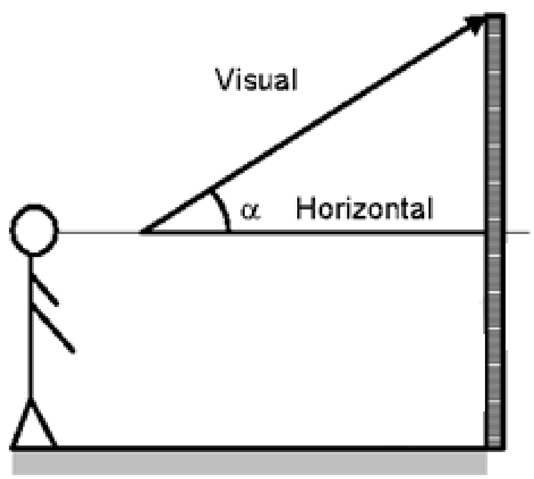
Angulo de Depresión (β)

Es un ángulo vertical que está formado por una línea horizontal que pasa por el ojo del observador y su línea visual por debajo de esta.



Angulo de Elevación (α)

Es un ángulo vertical que está formado por una línea que pasa por el ojo del observador y su visual por encima de esta.



ACTIVIDAD DE INTEGRACION 4.

Integre grupos de trabajo de 2 estudiantes como máximo (opcional). Discuta y desarrolle cada uno de los siguientes ejercicios y problemas que a continuación se presentan. Desarrollarlos en su cuaderno de clases y presentarlos individualmente en la fecha y tiempo estipulado por el profesor.

PROBLEMAS RESUELTOS

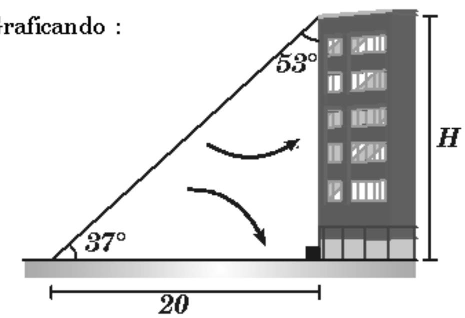
PROBLEMA 1 :

Si desde un punto en tierra ubicado a ***20 m*** de la base de un edificio ; el ángulo de elevación para su parte más alta mide ***37°***. Calcular la altura del edificio.

A) 18 m ***B) 10*** ***C) 12*** ***D) 15*** ***E) 16***

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Se deduce que : $H=20\,tg\,37^{o}$

$H=20\,tg\,37^{o} \Rightarrow H=15m$

RPTA : "D"

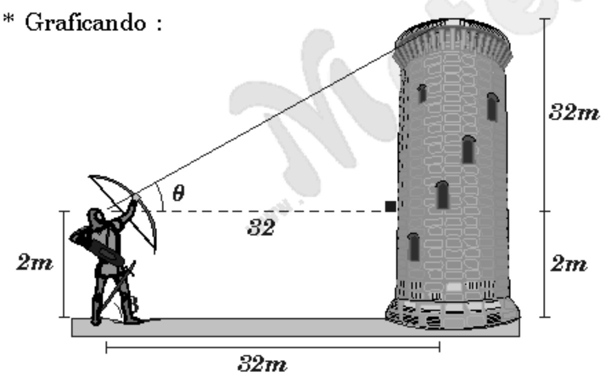
PROBLEMA 2 :

Una persona de ***2 m*** de estatura, ubicada a ***32 m*** de una torre de ***34 m*** de altura; divisa la parte más alta con un ángulo de elevación de:

A) 28° ***B) 30°*** ***C) 37°*** ***D) 45°*** ***E) 60°***

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Se deduce que : $tg\,\theta=\dfrac{32}{32} \Rightarrow tg\,\theta=1 \Rightarrow \theta=45^{o}$

RPTA :"D"

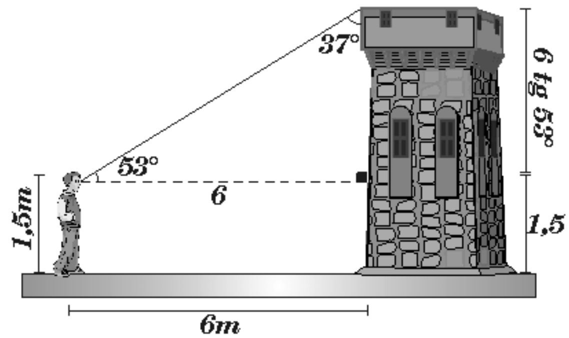
PROBLEMA 3 :

Un niño de estatura de ***1,5 m***; esta ubicado a ***6 m*** de una torre y observa su parte más alta con un ángulo de elevación de ***53°***. ¿Cuál es la altura de la torre?

A) 9 m ***B) 8*** ***C) 7*** ***D) 6,5*** ***E) 9,5***

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Se deduce que :

$$H=1,5+6\,tg\,53^{o} \Rightarrow H=1,5+6\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow H=9,5\,m$$

RPTA : "E"

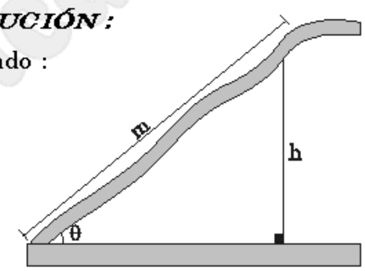
PROBLEMA 4 :

Una colina está inclinada un ángulo ***"θ"*** respecto a la horizontal. A una distancia ***"m"*** del inicio de la colina y sobre ella se encuentra un objeto. ¿A qué altura se encuentra respecto a la horizontal?

A) m sen θ ***B) m cos θ*** ***C) m tg θ***
D) m ctg θ ***E) m sec θ***

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



$$\Rightarrow \frac{h}{m}=sen\,\theta \Rightarrow h=m\,sen\,\theta$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 5:

Desde lo alto de un edificio de altura ***"h"*** se divisa una piedra en el suelo con un ángulo de depresión ***" β "***. ¿A qué distancia de la base del edificio, se halla la piedra?

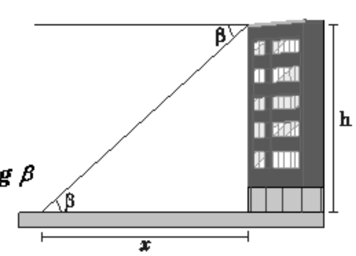
A) h sec β ***B) h csc β*** ***C) h tg β*** ***D) h cos² β*** ***E) h ctg β***

RESOLUCIÓN :

* Graficando :

* Se deduce que :

$$\frac{x}{h}=ctg\,\beta \Rightarrow x=h\,ctg\,\beta$$



RPTA : "E"

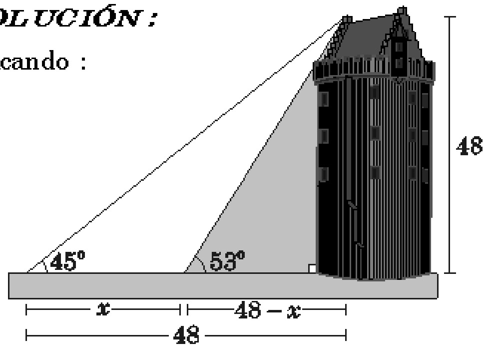
PROBLEMA 6 :

Desde un punto que se encuentra a ***48 m*** del pie de una torre el ángulo de elevación para la parte más alta es $45°$. ¿Cuánto debe acercar dicho punto para que el nuevo ángulo de elevación sea $53°$?

A) 10 m ***B) 6*** ***C) 4*** ***D) 16*** ***E) 12***

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Se deduce que :

$$\frac{48-x}{48}=ctg\,53° \Rightarrow 48-x=48\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 48-x=36 \Rightarrow 12=x$$

RPTA : "E"

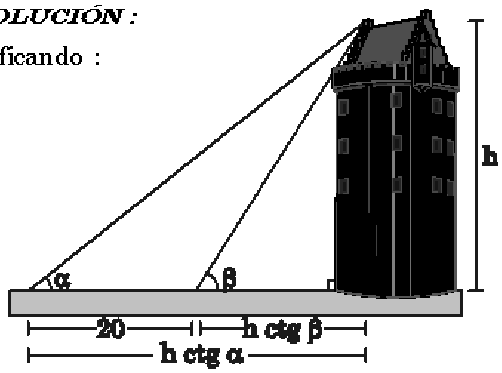
PROBLEMA 7 :

Desde un punto en tierra se divisa lo alto de una torre con un ángulo de elevación "α". Si el observador se acerca ***20 m*** el ángulo de elevación sería "β". Determinar la altura de la torre, si además se sabe que: $ctg\,\alpha - ctg\,\beta = 0,25$.

A) 10 ***B) 80*** ***C) 160*** ***D) 240*** ***E) 40***

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



*Del gráfico se nota :

$$h\,ctg\,\alpha - h\,ctg\,\beta = 20 \Rightarrow h(\underbrace{ctg\,\alpha - ctg\,\beta}) = 20$$

$$\Rightarrow h(0,25) = 20 \Rightarrow h = 80$$

RPTA : "B"

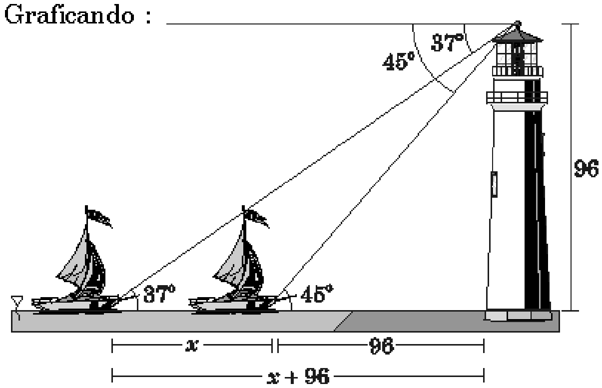
PROBLEMA 8 :

Desde lo alto de un faro, se divisan dos barcos a un mismo lado del faro, con ángulos de depresión de $45°$ y $37°$. Si la altura del faro es de ***96 m***. ¿Cuál sería la distancia entre los barcos?

A) 4 m ***B) 8*** ***C) 16*** ***D) 32*** ***E) 64***

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Se deduce que :

$$\frac{x+96}{96} = ctg\,37° \Rightarrow x+96 = 96\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow x = 32\ m$$

RPTA : "D"

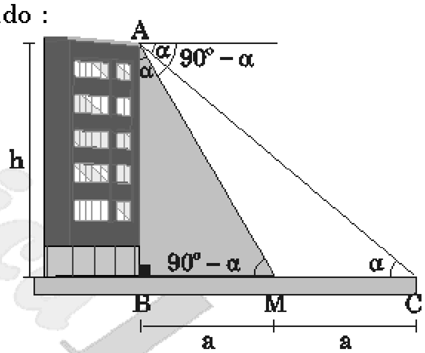
PROBLEMA 9 :

Desde lo alto de un edificio se ve un punto en tierra con un ángulo de depresión "α" y a otro punto ubicado a la mitad entre el primer punto y el edificio, con ángulo de depresión "$90° - \alpha$". Determinar : $ctg^2\alpha$.

A)1 ***B)2*** ***C)3*** ***D)4*** ***E)$\frac{1}{2}$***

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Del ◺ABC :

$\rightarrow ctg\,\alpha = \frac{2a}{h}$ ....(I)

* Del ◺ABM :

$\rightarrow ctg\,\alpha = \frac{h}{a}$ ....(II) $\times$

$$ctg^2\alpha = \frac{2a}{h} \times \frac{h}{a}$$

$$\Rightarrow ctg^2\alpha = 2$$

RPTA : "B"

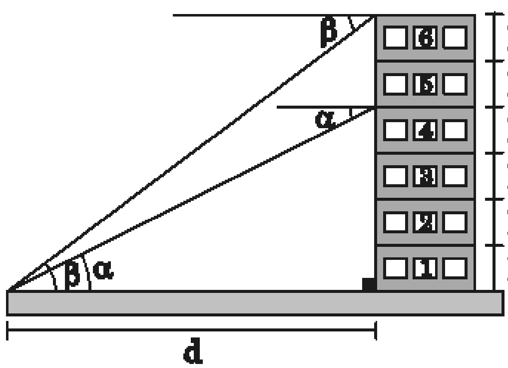
PROBLEMA 10 :

Desde la parte superior de un edificio de ***6*** pisos iguales el ángulo de depresión para un punto en el suelo es "β" y desde la parte más alta del cuarto piso el ángulo de depresión es "α". Determinar : $tg\,\alpha.\,ctg\,\beta$.

A)$\frac{1}{2}$ ***B)$\frac{2}{3}$*** ***C)$\frac{5}{6}$*** ***D)$\frac{4}{5}$*** ***E) 1***

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Se aprecia:

$$tg\alpha = \frac{4h}{d}$$

$$ctg = \frac{d}{6h}$$

$$\Rightarrow tg\ \alpha\, ctg\ \beta = \frac{4n}{d} \times \frac{d}{6h} = \frac{2}{3}$$

RPTA : "B"

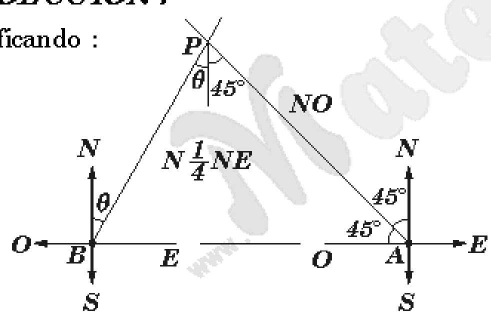
PROBLEMA 11 :

Una persona A se encuentra al este de otra persona B, si B se desplaza en dirección $N\frac{1}{4}NE$ y la persona A en la dirección NO, se encuentra en el punto P . Determinar cuanto mide el ángulo APB.

A) 45°   B) 11°15'   C) 47°15'   D) 56°15'   E) 12°15'

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Sabemos que : $N\frac{1}{4}NE = N\underbrace{11^{o}15'}_{\theta}E$

* Luego, en la figura:

$$\widehat{APB} = 45^{o} + \theta = 45^{o} + 11^{o}15' \Rightarrow \widehat{APB} = 56^{o}15'$$

RPTA : "D"

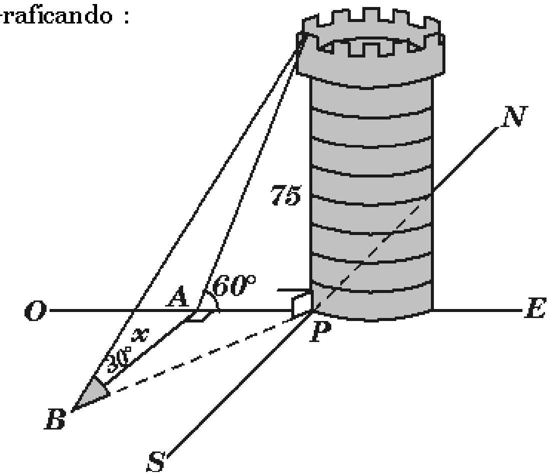
PROBLEMA 12 :

La elevación de una torre desde un punto A al oeste de ella es $60°$ y desde un punto B al sur de A , la elevación es de $30°$. Si la torre tiene $75\ m$ de altura ,Determinar la distancia comprendida entre A y B .

A) $50\sqrt{6}$ B) $30\sqrt{3}$ C) $20\sqrt{6}$ D) $80\sqrt{2}$ E) 90

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Se deduce que : $AP = 75\ ctg\ 60^{o} = \frac{75}{\sqrt{3}}$

$$BP = 75\ ctg\ 30^{o} = 75\sqrt{3}$$

* Ahora por el teorema de Pitágoras:

$$\boxed{AB^2 + AP^2 = BP^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{75^2}{3} = 75^2\ (3) \Rightarrow x^2 = 75^2\left(3 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow x^2 = 75^2\left(\frac{8}{3}\right) \Rightarrow x = 50\sqrt{6}$$

RPTA : "A"

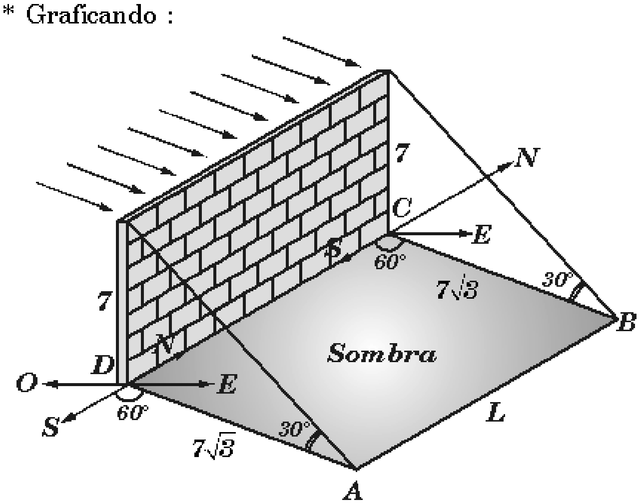
PROBLEMA 13 :

La base de un muro de 7 metros de altura se halla en una línea que va de norte a sur . El rumbo de la luz solar es $S60°E$, y su ángulo de depresión es $30°$. Determinar el ancho de la sombra del muro .

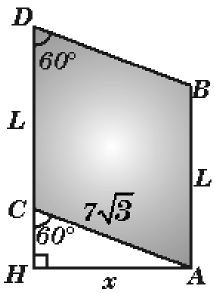
A) 10 m   B) 9m   C) 10,5m   D) $10\sqrt{3}$ m   E) 12m

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



*Visto de planta la sombra se nota que es $ABCD$.



* ***ABCD*** será un paralelogramo .

* x , ancho de la sombra

$\triangle_{AHC}$ (notable ***30°*** y ***60°***)

$$\Rightarrow x = 7\sqrt{3}\ sen 60° = 7\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x = 10,5\,m$$

RPTA : "C"

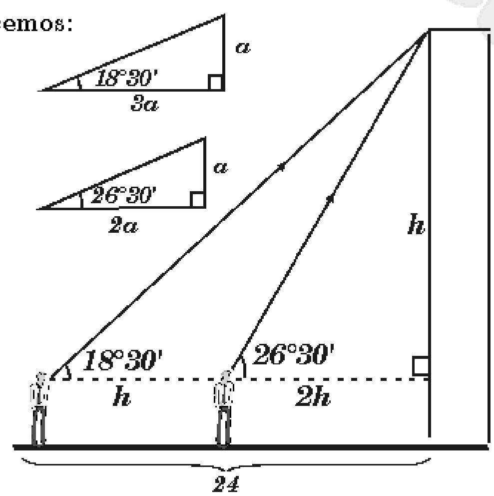
PROBLEMA 14:

Un niño observa la parte superior de un edificio con un ángulo de elevación de ***18,5°***. Si el niño se encuentra a ***24m*** del pie del edificio,¿cuánto deberá caminar (en m)en dirección del edificio, para obtener la parte superior de este con un ángulo de ***26, 5°***?

A)4 B)8 C)10 D)12 E)16

RESOLUCIÓN:

Conocemos:



notemos que: $3h = 24 \Rightarrow h = 8$

Luego: el niño debe de caminar ***8m***

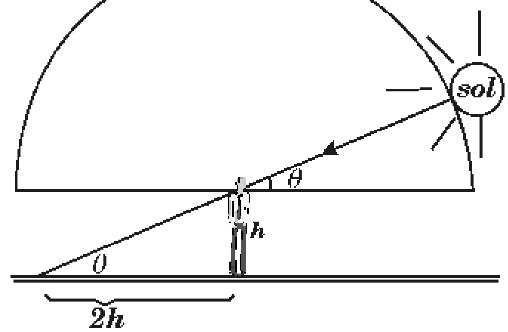
RPTA : "B"

PROBLEMA 15:

Calcule la medida aproximada del ángulo de elevación del Sol, cuando una persona de h metros de estatura proyecta una sombra de ***2h*** metros de longitud en un terreno a nivel.

A)15° B)18° C)18,5° D)26,5° E)30°

RESOLUCIÓN :



Como: $Tan\theta = \frac{h}{2h} - \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 26°30'$

RPTA : "D"

PROBLEMA 16:

Al despegar de la pista un avión vuela en línea recta formando un ángulo de inclinación de ***30°*** (en este trayecto recorre ***100*** m), posteriormente recorre ***200 m*** en línea recta horizontal de tal manera que desde el punto de despegue el avión es observado con un ángulo de elevación α; al calcular $cot(\alpha)$ se obtiene:

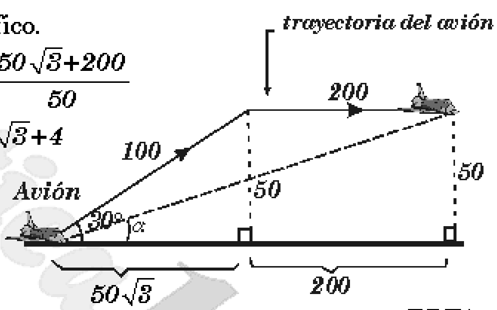
A) $\sqrt{3}+1$ **B)** $\sqrt{3}+2$ **C)** $\sqrt{3}+3$ **D)** $\sqrt{3}+4$ **E)** $\sqrt{3}+5$

RESOLUCIÓN :

Del gráfico.

$$Cot\alpha = \frac{50\sqrt{3}+200}{50}$$

$$Cot\alpha = \sqrt{3}+4$$



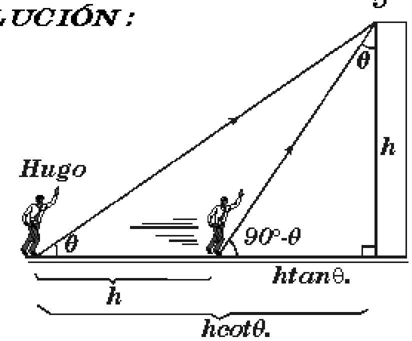
RPTA : "D'

PROBLEMA 17:

Desde un punto en tierra se observa la parte más alta de un muro con un ángulo de elevación cuya medida es θ. Si nos acercamos al muro una distancia igual a la altura, el ángulo de elevación es el complemento de θ. Calcule $P = tan(\theta) + cot(\theta)$.

A) $\sqrt{5}+1$ **B)** $\sqrt{5}$ **C)** $\sqrt{5}-1$ **D)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **E)** $\frac{\sqrt{5}}{3}$

RESOLUCIÓN :



Del gráfico observamos que:

$$hCot\theta = h + hTan\theta \Rightarrow Cot\theta - Tan\theta = 1$$

Se pide: $M = Cot\theta + Tan\theta$

Conocemos que:

$$(Cot\theta + Tan\theta)^2 - (Cot\theta - Tan\theta)^2 = 4$$

$$\Rightarrow M^2 - 1^2 = 4 \Rightarrow M = \sqrt{5}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 18:

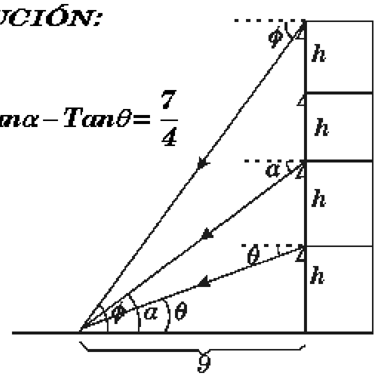
Desde la parte superior e inferior del segundo piso de un edificio de *4* pisos iguales, se observa una piedra en el suelo (a *9m* del pie del edificio)con ángulo de depresión α y θ respectivamente y desde la parte superior del edificio la depresión angular para la piedra es ϕ, calcule la altura (en *m*)de dicho edificio , si $tan(\phi) - tan(\alpha) - tan(\theta) = \frac{7}{4}$.

A)63 B)64 C)62 D)60 E)50

RESOLUCIÓN:

Condición:

$$Tan\phi - Tan\alpha - Tan\theta = \frac{7}{4}$$



Sustituimos en la condición:

$$\frac{4h}{9} - \frac{2h}{9} - \frac{h}{9} = \frac{7}{4} \Rightarrow 4h = 63$$

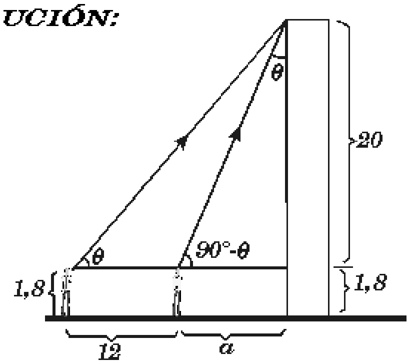
RPTA : "A"

PROBLEMA 19:

Una persona de *1,8m* de estatura observa la parte superior de un edificio de *21,8m* de altura con un ángulo de elevación θ. En la misma dirección la persona se acerca *12m* al edificio, y el nuevo ángulo de elevación con que observa el mismo punto es el complemento de θ. Halle $10\,tan(\theta)+3$.

A)9 B)10 C)$\sqrt{109}$ D)$\sqrt{126}$ E)12

RESOLUCIÓN:



Del gráfico:
$$\begin{cases} Tan\theta = \dfrac{20}{12+a} \Rightarrow a = \dfrac{20 - 12Tan\theta}{Tan\theta} \\ Tan\theta\,\dfrac{a}{20} \Rightarrow a = 20Tan\theta \end{cases}$$

igualamos las expresiones:

$$\frac{20 - 12Tan\theta}{Tan\theta} = 20Tan\theta \Rightarrow 20 - 12Tan\theta = 20Tan^2\theta$$

$$\Rightarrow 0 = 5Tan^2\theta + 3Tan\theta - 5$$

luego:

$$Tan\theta = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(5)(-5)}}{2 \times 5} \Rightarrow Tan\theta = \frac{-3 \pm \sqrt{109}}{10}$$

Pero: $Tan\theta > 0 \Rightarrow Tan\theta = \dfrac{\sqrt{109} - 3}{10} \Rightarrow 10Tan\theta + 3 = \sqrt{109}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 20:

Una estatua de *5* metros de altura descansa sobre una pedestal de *4m* de alto. Si desde un punto en el piso se observa la cabeza de la estatua con un ángulo de elevación 2θ y el ángulo de visual de la estatua es θ, halle la distancia del observador al pedestal y $cos(2\theta)$.

A)6 y 0,6 B)7 y 0,7 C)8 y 0,8 D)10 y 0,9 E)12 y 0,8

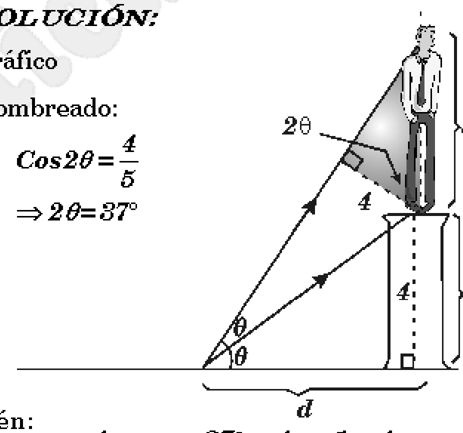
RESOLUCIÓN:

Del gráfico

sombreado:

$$Cos2\theta = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow 2\theta = 37°$$



también:

$$Tan\theta = \frac{4}{d} \Rightarrow Tan\frac{37°}{2} = \frac{4}{d} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{d} \Rightarrow d = 12$$

RPTA : "E'

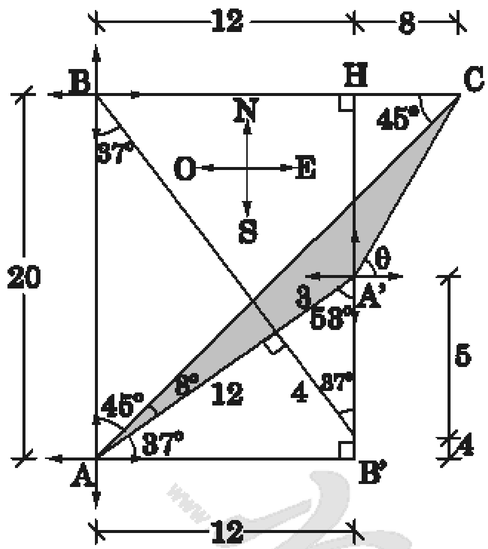
PROBLEMA 21 :

Tres personas *A* , *B* y *C* se encuentran en un plano horizontal , tal que *B* se encuentra a una distancia de *20m* al norte de *A* y C se encuentra al este y noreste de *B* y *A* si encuentra al este y noreste de *B* y *A* respectivamente . Si *A* y *B* se desplazan en direcciones *N53°E* y *S37°E* respectivamente hasta que *A* se encuentra a *5 m* al norte de *B* , y en ese instante *C* se encuentra al $E\,\theta N$ de la nueva posición de *A* , luego el valor de $tan\,\theta$ es :

A)$\frac{8}{7}$ B)$\frac{8}{11}$ C)$\frac{9}{8}$ D)$\frac{5}{4}$ E)$\frac{11}{8}$

RESOLUCIÓN :

* Del enunciado tenemos (nótese que ***A'*** y ***B'*** son las segundas posiciones de ***A*** y ***B*** respectivamente)



*En el triángulo sombreado

($\triangle A'HC$), $A'H = 11$ y $HC = 8$

* Luego , definimos : $\tan\theta = \frac{A'H}{HC} = \frac{11}{8}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 22:

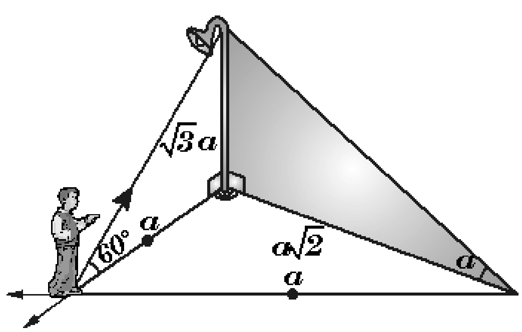
Un alumno observa lo alto de un poste con un ángulo de elevación de ***60°***. Luego camina hacia la derecha una distancia igual a la distancia que lo separaba del poste inicialmente y en ese momento observa el mismo punto con un ángulo de elevación α.

Determinar : $3\,ctg^2\alpha$.

A) 1 ***B)*** 2 ***C)*** $\frac{5}{2}$ ***D)*** 3 ***E)*** $\frac{7}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando lo que va a suceder :



* Del triángulo sombreado se deduce que :

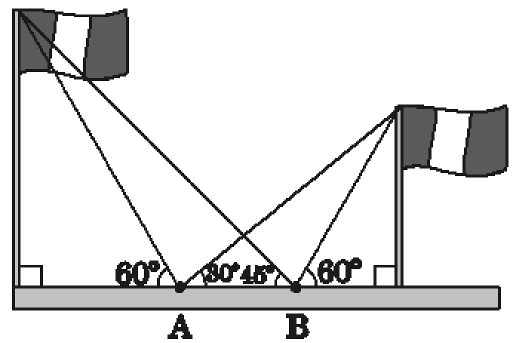
$$ctg\,\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow ctg^2\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3ctg^2\alpha = 2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 23:

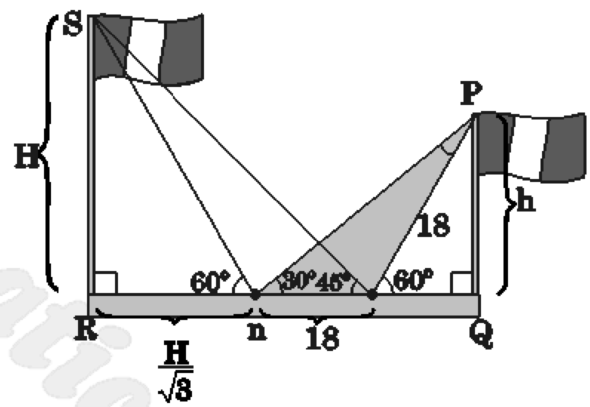
Los ángulos de elevación de las puntas de las astas de dos banderas , según gráfica vistas desde la posición ***A*** miden ***30°*** y ***60°***; y vistas desde la posición ***B*** , miden ***60°*** y ***45°***. Si la longitud ***AB*** es de ***18 m***; entonces al calcular la diferencia entre las alturas de las astas, se obtiene :



A) *25 m*
B) *25,5 m*
C) *26 m*
D) *26,5 m*
E) *27 m*

RESOLUCIÓN :

* Completando datos:



* En el $\triangle BPQ$: $h = 9\sqrt{3}$

* En el $\triangle SRB$: $18 + \frac{H}{\sqrt{3}} = H \Rightarrow H = 27 + 9\sqrt{3}$

* Se pide : $H - h = 27 + 9\sqrt{3} - 9\sqrt{3}$

$$\Rightarrow H - h = 27\ m$$

RPTA : "E"

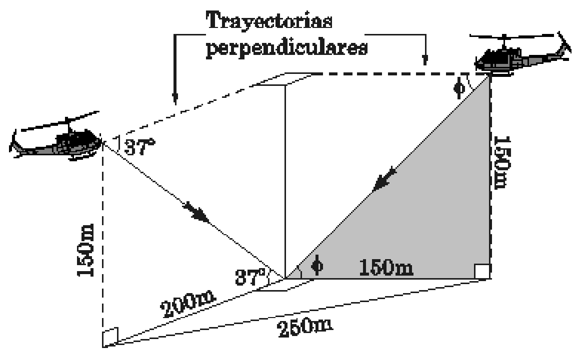
PROBLEMA 24:

Dos helicópteros que vuelan en trayectorias perpendiculares a una altura de ***150 m***, disparan simultáneamente un misil cada uno para dar a un mismo objetivo . En el momento del disparo, uno de los helicópteros observa el objetivo con un ángulo de depresión de ***37°*** y se encuentra a ***250 m*** del otro . ¿Cuál será el ángulo de depresión con el que observa el otro helicóptero al objetivo?

A) *15°* ***B)*** *30°* ***C)*** *37°* ***D)*** *45°* ***E)*** *53°*

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Del triángulo sombreado : $\phi = 45^\circ$

RPTA : "D"

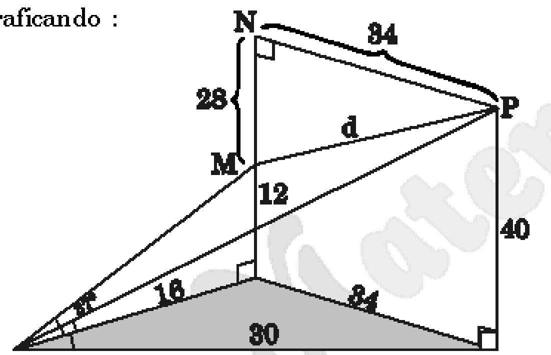
PROBLEMA 25:

Un hombre observa a su derecha la parte más alta de un edificio de ***40 m*** de altura con un ángulo de elevación de ***53°***, y frente a él observa la parte más alta de otro edificio de ***12 m*** de altura con un ángulo de elevación de ***37°***. Determinar la distancia que existe entre los dos puntos observados.

A) 44,015 m ***B) 44,045 m*** ***C) 44,075 m***
D) 45,050 m ***E) 46,045 m***

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Ahora del triángulo $\triangle MNP$: $d^2 = 28^2 + 34^2$

$\Rightarrow d = \sqrt{1940} \Rightarrow d = 44{,}045\ m$

RPTA : "B"

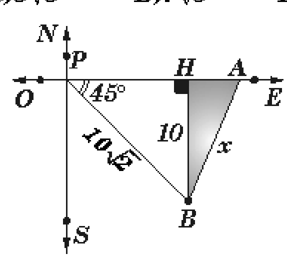
PROBELAMA 26:

Desde un punto ***"P"*** se divisa un objeto ***"A"*** al este y a ***15 m*** y otro punto ***"B"*** en la dirección ***E45°S*** y a $10\sqrt{2}$ m. ¿Cuál es la distancia entre ***"A"*** y ***"B"***?

A) $\sqrt{5}$ ***B)*** $3\sqrt{5}$ ***C)*** $5\sqrt{5}$ ***D)*** $7\sqrt{5}$ ***E)*** $6\sqrt{5}$

RESOLUCIÓN :

* Según los datos:



I) ***"A"*** se encuentra al este de ***"P"*** a ***15 m***.

II) ***"B"*** en ***E45°S*** y a $10\sqrt{2}\ m$.

III) Trazamos

$\overline{BH} \perp \overline{PA} : BH = PH = 10\,(45^\circ \Rightarrow notable)\, HA = 5$

IV) Por Pitágoras : $x^2 = 10^2 + 5^2$

$\Rightarrow x^2 = 125 \Rightarrow x = 5\sqrt{5}$

RPTA : "C"

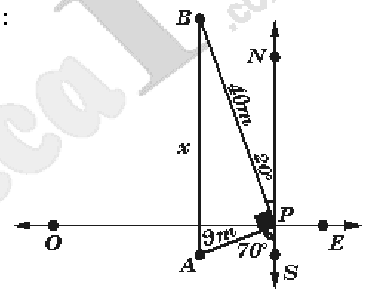
PROBLEMA 27:

Desde un punto se observan dos barcos en la dirección ***N20°O*** y ***S70°O***, a las distancias de ***40*** y ***9 m*** respectivamente. ¿Cuál es la distancia de separación de los barcos?

A) 40 m ***B) 49*** ***C) 41*** ***D) 9*** ***E) 81***

RESOLUCIÓN :

* Con los datos indicados, ubicamos las direcciones de cada barco :



* $\triangle ABP$: Por Pitágoras: $x^2 = 40^2 + 9^2 \Rightarrow x = 41m$

RPTA : "C"

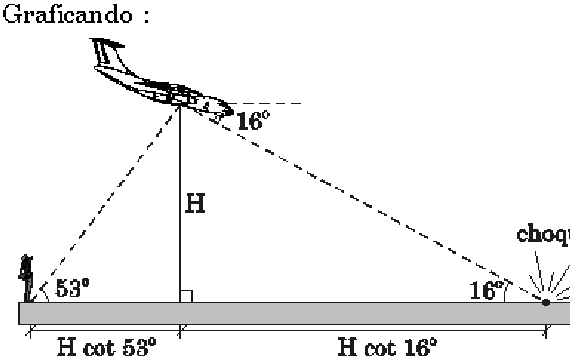
PROBLEMA 28 :

Un avión que se encuentra a una altura ***"H"*** sufre un desperfecto y cae a tierra siguiendo una trayectoria recta que hace un ángulo con respecto a la horizontal de ***16°***; además, una persona en tierra observa la caída con un ángulo de ***53°***. Determinar la distancia del choque con respecto al observador .

A) $\frac{3H}{4}$ ***B)*** $\frac{5H}{4}$ ***C)*** $\frac{117H}{28}$ ***D)*** $\frac{25H}{7}$ ***E)*** $\frac{19H}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



$\Rightarrow$(*Distancia del observador al choque*)$=H\cot 53^\circ + H\cot 16^\circ$

$$=H\left(\cot 53^\circ + \cot 16^\circ\right)=H\left(\frac{4}{3}+\frac{24}{7}\right)=\frac{25}{7}H$$

RPTA : "D"

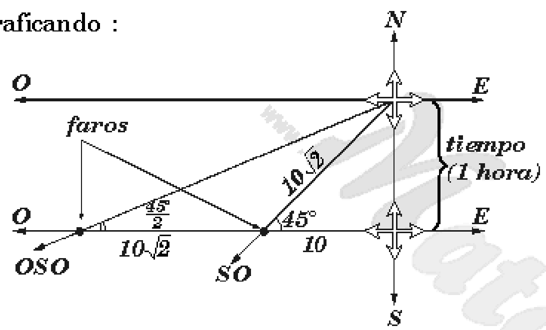
PROBLEMA 29 :

Un navío que se dirige hacia el Norte, ve sobre una misma línea **2** faros en la dirección del Oeste ; después de una hora de marcha , los faros aparecen uno al Sur–Oeste y al otro al Oeste – Sur– Oeste. Sabiendo que la distancia de los faros es de $10\sqrt{2}\ km$, Determinar la velocidad del navío en km/h.

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



$$V=\frac{e}{t}\Rightarrow V=\frac{10\ km}{1\ h}=10\ km/h$$

RPTA : "A"

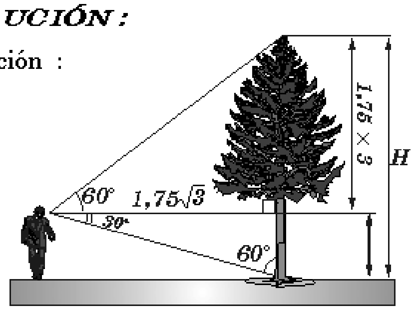
PROBLEMA 30 :

Una persona de **1,75 m** de estatura observa un árbol con un ángulo de depresión de **30°** su base y con un ángulo de elevación de **60°** su parte superior . Determinar la altura del árbol.

A) 5,25 m **B)** 3,50m **C)** 7m **D)** $3\sqrt{3}$ m **E)** $7\sqrt{3}$ m

RESOLUCIÓN :

* Graficación :



* Del gráfico : $H=4.(1,75)=7m$

RPTA : "C"

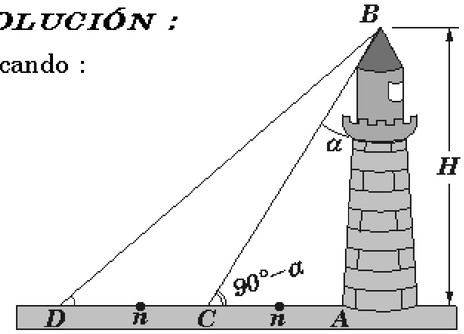
PROBLEMA 31:

Desde un punto en el terreno se observa una torre con un ángulo de elevación "α"; desde la mitad de la distancia el ángulo de elevación es complemento del anterior . Determinar : "$tg\,\alpha$".

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B)** 1 **C)** 2 **D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **E)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Del $\triangle$BAC :

$tg\alpha=\frac{n}{H}$ ....(I)

* Del $\triangle$ABM :

$tg\alpha=\frac{H}{2n}$ ....(II)

×

$$tg^2\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

RPTA : "A"

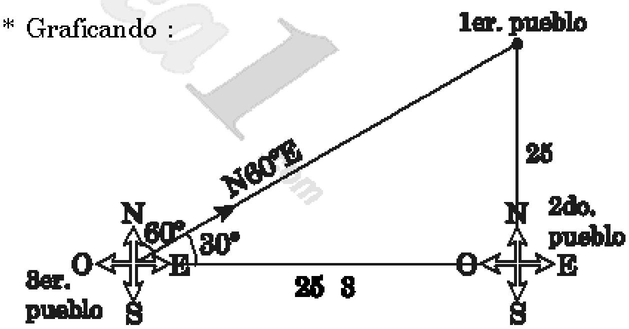
PROBLEMA 32 :

Un pueblo se encuentra a **25 km** al Norte de otro que a su vez está a $25\sqrt{3}\ km$ al Este de un tercero, ¿en qué dirección está el tercer pueblo del primero?

A) E60°N **B)** N60°O **C)** 060°S
D) S60°O **E)** N60°E

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



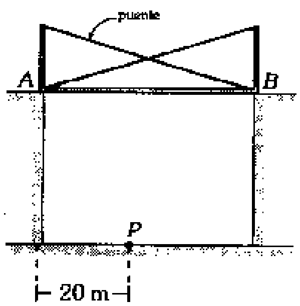
* Entonces de la figura , el primer pueblo está al **N60°E** del tercer pueblo .

RPTA : "E"

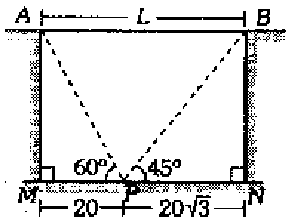
PROBLEMA 33:

En el gráfico se muestra un puente y para determinar su longitud se hacen mediciones a partir del punto **P** . Si desde **P** se observa **A** con un ángulo de elevación de **60°** y **B** con un ángulo de elevación **45°** , encuentra dicha longitud .

A) 100 m
B) 200 m
C) $20(10-\sqrt{3})$
D) $20(10+\sqrt{3})m$
E) $20(1+\sqrt{3})m$



RESOLUCIÓN :



*$\triangle$ AMP: $AM=20\sqrt{3}$

*como $AM=BN=PN \Rightarrow PN=20\sqrt{3}$

$\Rightarrow L=20+20\sqrt{3} \Rightarrow L=20(1+\sqrt{3})m$

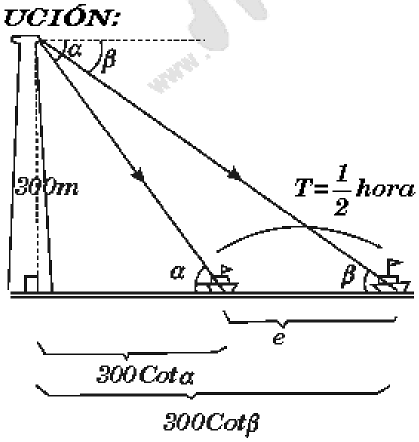
RPTA : "E"

PROBLEMA 34:

Desde un faro de **300m** de altura sobre el nivel del mar se observa un barco que se aleja, con ángulo de depresión de medida α y media hora mas tarde se observa, en la misma dirección el mismo barco, con un ángulo de depresión de medida β. Halle la rapidez del barco (en m/hr).

A) $100[\cot(\beta)-\cot(\alpha)]$ B) $150[\cot(\beta)-\cot(\alpha)]$
C) $300[\tan(\beta)-\tan(\alpha)]$ D) $600[\tan(\beta)-\tan(\alpha)]$
E) $600[\cot(\beta)-\cot(\alpha)]$

RESOLUCIÓN:



$$V_{barco}=\frac{e}{t} \Rightarrow V_{barco}=\frac{300(Cot\beta-Cot\alpha)m}{\frac{1}{2}hora}$$

$$\Rightarrow V_{barco}=600(Cot\beta-Cot\alpha)\frac{m}{hr}$$

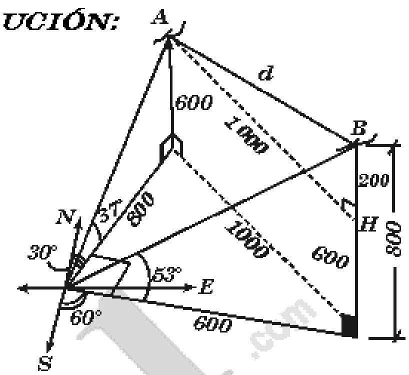
RPTA : "E"

PROBLEMA 35:

Desde un punto ubicado en el suelo se observa un avión ***A*** volando a ***600m*** de altura, en la dirección ***N30°E***, con un ángulo de elevación de ***37°***; y desde ese mismo punto se observa, en ese mismo instante otro avión ***B*** volando a ***800m*** de altura, con un ángulo de elevación de ***53°***. en la dirección ***S60°E***. Calcule la distancia (en ***m***) entre los aviones **A** y **B.**

A) $50\sqrt{26}$ B) $100\sqrt{26}$ C) $100\sqrt{29}$ D) $200\sqrt{26}$ E) $200\sqrt{29}$

RESOLUCIÓN:



Apliquemos el teorema de Pitágoras en el $\triangle$ ***AHB*** :

$$d^2=1000^2+200^2 \Rightarrow d^2=200^2(5^2+1^2)$$

$$\Rightarrow d=200\sqrt{26}$$

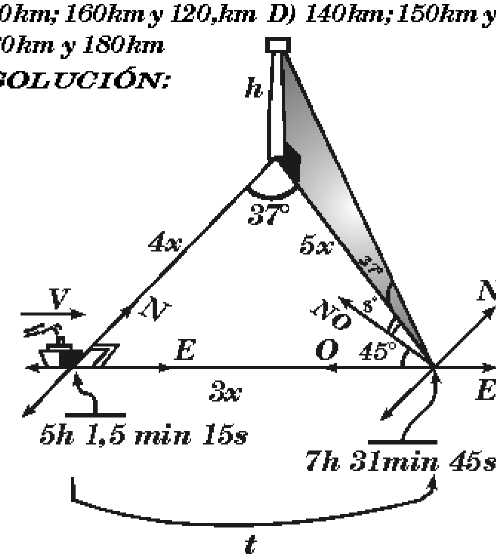
RPTA : "D"

PROBLEMA 36:

Un navío que viaja exactamente hacia el ***ESTE*** a la velocidad uniforme de ***40,8 km/h***, observa el pie de un faro exactamente en el rumbo NORTE a las ***5h 1,5' 15"***, luego ***8°*** al NORTE del ***NO*** a las ***7h 31' 45"*** y la parte mas alta del faro con un ángulo de elevación de ***37°***. Halle las distancias del pie del faro a los dos puntos de observación y la altura del faro respectivamente.

A) 136km;170km y 127,5km B) 140km;180km y 150km
C) 130km; 160km y 120,km D) 140km;150km y 120km
E) 180km y 180km

RESOLUCIÓN:



Observemos que :

$$t = 7h\,31min\,45s - 5h1,5\,min\,15s$$

$$\Rightarrow t = 2h\,29,5\,min\,30\,s$$

$$\Rightarrow t = 2h + \frac{29,5}{60}h + \frac{30}{3600}h \Rightarrow t = \frac{10}{4}h$$

Además : $3x=vt$, dato : $V= 40,8\ km/h$

$$3x = 40,8 \times \frac{10}{4} \Rightarrow x = 34$$

En el ◺ sombreado :

$$h = 5x\tan 37° = 170 \times \frac{3}{4} \Rightarrow h = 127,5\ km$$

Nos piden :

$4x=136\ km$, $5x=170\ km$, $h=127,5\ km$

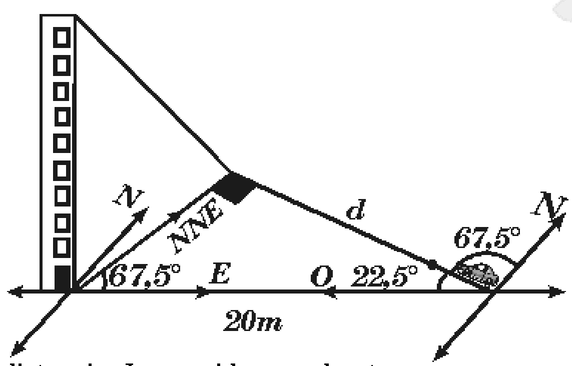
RPTA : "A"

PROBLEMA 37:

Alejandro se encuentra al pie de un edificio y a $20m$ de distancia observa un auto en la dirección ESTE. El auto se desplaza en la dirección $N67,5°O$. Luego, Alejandro sube a lo alto del edificio de $20m$ de altura y observa al auto en la dirección *NNE*. Halle la distancia aproximada (en m) recorrida por el auto.

A) 18,48 **B)** 19,48 **C)** 20,18 **D)** 21,08 **E)** 22

RESOLUCIÓN:



La distancia d recorrida por el auto es :

$$d= 20\cos 22,5°$$

$$\Rightarrow d= 20\times0,924 \Rightarrow d = 18,48\ m$$

RPTA : "A"

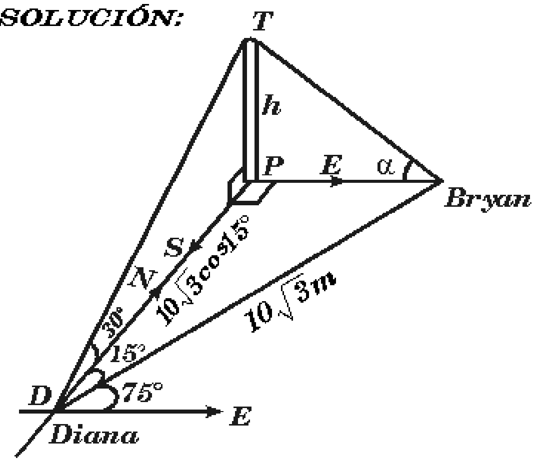
PROBLEMA 38:

Diana y Bryan, situados al SUR y al ESTE respectivamente de una torre, miden ángulos de elevación de $30°$ y α, respectivamente; la que se encuentra al SUR debe seguir la dirección $E75°N$ y caminas $10\sqrt{3}\ m$ para llegar donde está Bryan. ¿Cuál es la altura de la torre?

A) $2\sqrt{2+\sqrt{2}}\,m$ B) $5\sqrt{2+\sqrt{3}}\,m$ C) $\left(10\sqrt{3+\sqrt{2\sqrt{2}}}\right)m$

D) $5\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}}\,m$ E) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,m$

RESOLUCIÓN:



En el ◺ DPT :

$$h = 10\sqrt{3}\cos 15°.\tan 30°$$

$$h = 10\sqrt{3}\sqrt{\frac{1+\cos30°}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = 5\sqrt{2+\sqrt{3}}\ m$$

RPTA : "B"

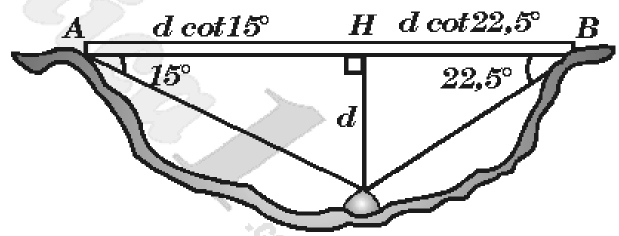
PROBLEMA 39:

Desde los extremos A y B de un puente se observa una piedra exactamente debajo de él, con ángulos de depresión de $15°$ y $22,5°$ respectivamente. Halle la distancia entre dichos extremos, si la distancia de la piedra al puente es de "d" metros.

A) $d(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ B) $d(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)$ C) $d(3+\sqrt{3}+\sqrt{2})$

D) $d(\sqrt{3}-\sqrt{2}+2)$ E) $d(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)$

RESOLUCIÓN:



$$AB = d\cot 15° + d\cot22,5°$$

Se sabe que :

* $Cot15° = Csc30° + Cot30° = 2+\sqrt{3}$
* $Cot22,5° = Csc45° + Cot45° = \sqrt{2}+1$

Luego $AB = d(2+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)$

$$AB = d(3+\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

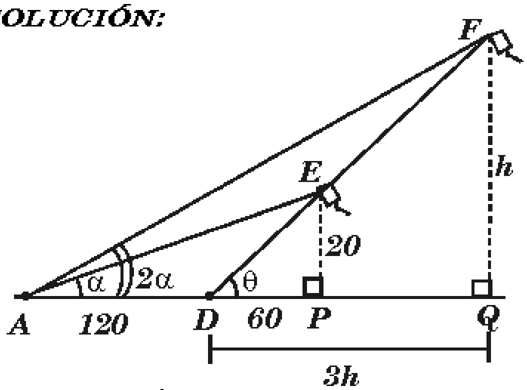
RPTA : "C"

PROBLEMA 40:

El niño Daniel está volando su cometa soltándole cuerda, la misma que se mantiene tensa y haciendo un ángulo θ con la horizontal. A $120m$, detrás de Daniel está el niño Alejandro, cuando la cometa se encuentra a $20m$ de altura, Alejandro la observa con un ángulo α respecto a la horizontal. ¿A cuántos metros de altura se encontrará la cometa para que sea observada por Alejandro con un ángulo 2α? suponer que el ángulo de la cuerda con la horizontal se mantiene y $tg(\theta)=\frac{1}{3}$.

A) $\frac{637}{23}m$ B) $\frac{1285}{17}m$ C) $\frac{1080}{13}m$ D) $\frac{1561}{19}m$ E) $\frac{637}{13}m$

RESOLUCIÓN:



Dado que $tan\,\theta=\frac{1}{3}$ se tiene:

* $\triangle EPD$: $PD=60$

* $\triangle FQD$: $QD=3h$

En el $\triangle EPA$: $tan\,\alpha=\frac{20}{180}=\frac{1}{9}$

Luego :

$$tan\,2\alpha=\frac{2\,tan\,\alpha}{1-tan^2\,\alpha}\Rightarrow tan\,2\alpha=\frac{9}{40}\quad ....(I)$$

En el $\triangle$ FQA : $$tan\,2\alpha=\frac{h}{120+3h}\quad ....(II)$$

Haciendo $(I)=(II)$ se obtiene: $h=\frac{1080}{13}m$

RPTA : "C"

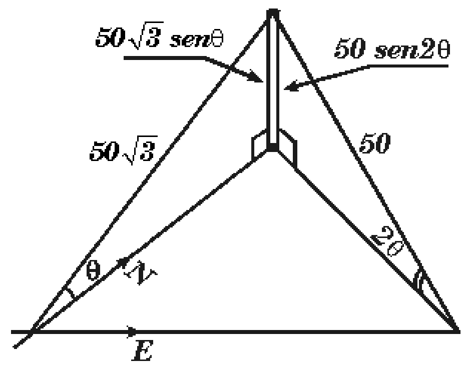
PROBLEMA 41:

Una persona divisa la parte mas alta de una torre con un ángulo de elevación θ, siendo la longitud de la visual $50\sqrt{3}$ metros, la torre se encuentra al norte de la persona. Luego, la persona avanza una cierta distancia hacia el este y vuelve a observar el punto anterior, pero ahora el ángulo de elevación es el doble del anterior y la longitud de la visual es 50 metros. Halle el valor del ángulo de elevación θ.

A) 15° B) 30° C) 37° D) 45° E) 53°

RESOLUCIÓN:

Vemos que :
$$50\,sen2\theta=50\sqrt{3}sen\theta$$
$$2\,sen\theta\cos\theta=\sqrt{3}sen\theta$$
$$cos\,\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=30°$$



NOTA : Si se pidiera la altura de la torre, la respuesta sería : $50\sqrt{3}\,sen30°=25\sqrt{3};\ \theta=30°$

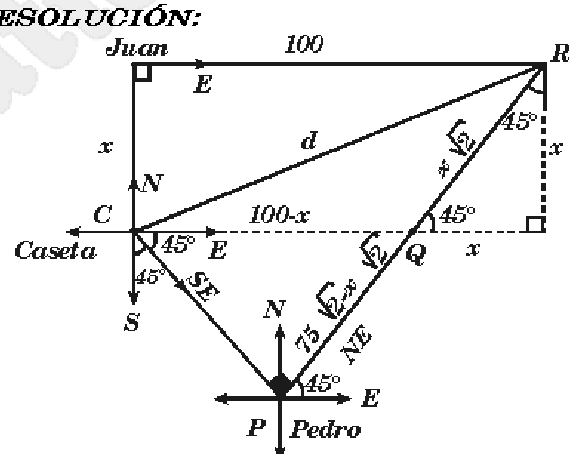
RPTA : "B"

PROBLEMA 42:

Juan sale de su casa, ubicada al NORTE de una caseta de vigilancia, al mismo tiempo que lo hace Pedro, cuya casa esta ubicada al ***SE*** de la misma caseta. Si Juan recorre ***100 m*** al ESTE y Pedro $75\sqrt{2}m$ al ***NE***, logrando encontrarse ¿Cuál es la distancia entre el punto de encuentro y la caseta de vigilancia (en ***m***)?

A) $25\sqrt{5}$ B) $25\sqrt{2}$ C) $50\sqrt{5}$ D) $50\sqrt{2}$ E) $75\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:



En el $\triangle$ ***CPQ*** :
$$100-x=(75\sqrt{2}-x\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow 100-x=150-2x$$
$$\Rightarrow x=50$$

Finalmente :
$$d^2=100^2+x^2$$
$$\Rightarrow d^2=100^2+50^2\Rightarrow d=50\sqrt{5}$$

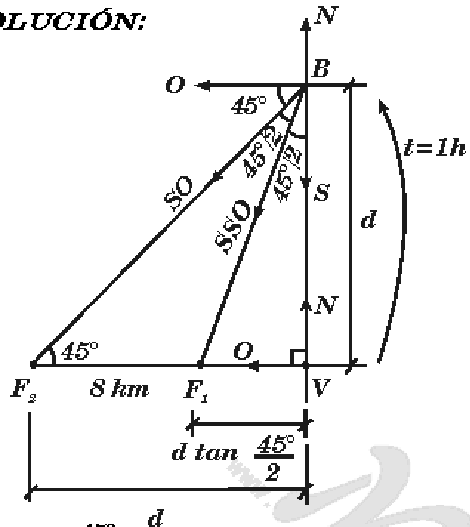
RPTA : "C"

PROBLEMA 43:

Un velero que se dirige hacia el Norte ve en un determinado momento a dos faros ubicados en línea recta en la dirección Oeste; después de una hora de navegación se observa que los faros se encuentran uno al ***SO*** y el otro a ***SSO***. Si la distancia entre los faros es de **8 km**, entonces la velocidad del velero en **km/h** es de:

A) $2(\sqrt{2}-1)$ **B)** $3(1+\sqrt{2})$ **C)** $4(2+\sqrt{2})$
D) $5(2\sqrt{2}-1)$ **E)** $2(\sqrt{2}+1)$

RESOLUCIÓN:



$$* \; d = 8 + d\tan\frac{45°}{2}$$

$$\Rightarrow d = 8 + d(\sqrt{2}-1)$$

$$\Rightarrow d = 4(2+\sqrt{2})\,km$$

La velocidad del velero es :

$$V = \frac{d}{t} = \frac{4(2+\sqrt{2})km}{1h} \Rightarrow V = 4(2+\sqrt{2})\frac{km}{h}$$

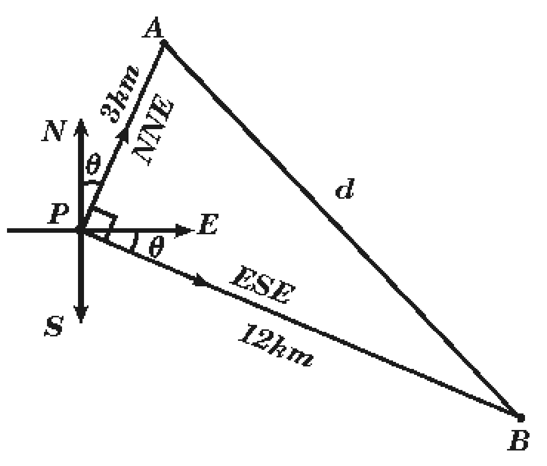
RPTA : "C"

PROBLEMA 44:

Una embarcación **A** se dirige en dirección, **NNE** y **B** se dirige en dirección **ESE**. Si la embarcación **A** se dirige con una rapidez de **3km/h** y **B** se dirige con una rapidez de **12km/h**. Halle la distancia (en **km**) entre **A** y **B** después de **60** minutos.

A) $\frac{2}{3}\sqrt{17}$ **B)** $\sqrt{17}$ **C)** $\frac{3}{2}\sqrt{17}$ **D)** $2\sqrt{17}$ **E)** $3\sqrt{17}$

RESOLUCIÓN:



Si las velocidades de las embarcaciones **A** y **B** son **3km/h** y **12km/h**, entonces en **60 min(1h)** recorren respectivamente :

$$PA = 3km \quad , \quad PB = 12km$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el ⊿ **APB** se obtiene :

$$d^2 = 3^2 + 12^2$$

$$\Rightarrow d^2 = 3^2(1^2+4^2) \Rightarrow d = 3\sqrt{17}\,km$$

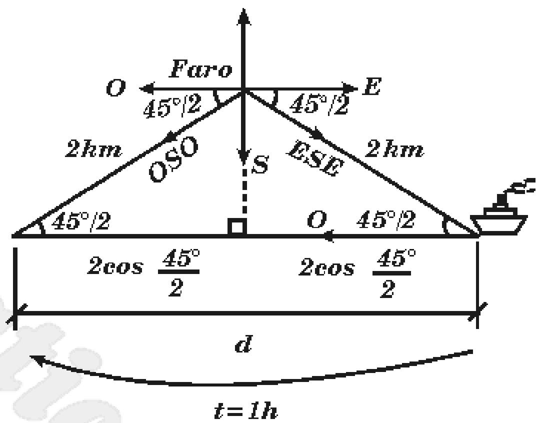
RPTA : "E"

PROBLEMA 45:

Un faro envía un haz de luz en forma de abanico que se extiende del **ESE** al **OSO**. Una embarcación a **2 km** del faro que navega hacia el **OESTE** entra al haz de luz en el **ESE** y después de una hora sale del haz de luz en el **OSO**. ¿Cuál es la velocidad **(en km/h)** aproximada del barco?

A) 1,85 **B)** 2,85 **C)** 3,7 **D)** 4,85 **E)** 5,85

RESOLUCIÓN:



Vemos que :

$$d = 4\cos\frac{45°}{2} \Rightarrow d = 4 \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow d = 3{,}696\,km$$

La velocidad del barco es :

$$V = \frac{d}{t} = \frac{3{,}696\,km}{1h} \Rightarrow V = 3{,}7\,km/h$$

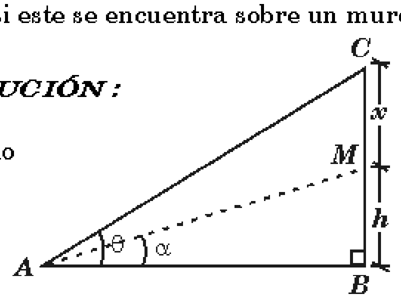
RPTA : "C"

PROBLEMA 46:

Desde un punto en tierra se observa la parte superior de un poste con un ángulo de elevación θ y su parte inferior con un ángulo de elevación α. Halle la altura del poste si este se encuentra sobre un muro de altura **h**.

RESOLUCIÓN :

Graficando



En el $\triangle ABM$: $tan\alpha=\dfrac{h}{AB}\Rightarrow AB=hcot\alpha$

En el $\triangle ABC$: $tan\,\theta=\dfrac{x+h}{AB}=\dfrac{x+h}{hcot\,\alpha}\Rightarrow hcot\,\alpha tan\,\theta$

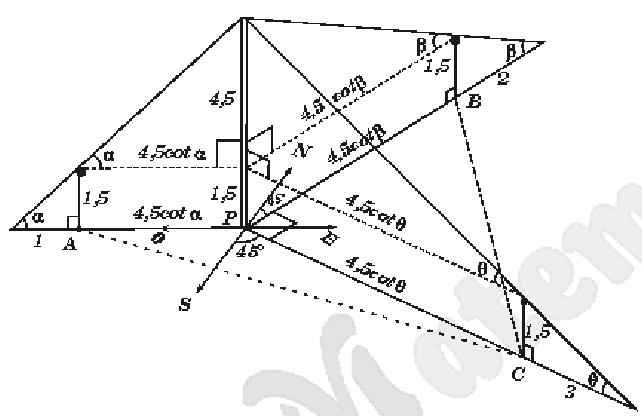
$\Rightarrow x+h\Rightarrow x=h(cot\,\alpha tan\,\theta-1)$

PROBLEMA 47:

Un farol de ***6 mt*** de altura, ubicado en el centro de un parque, alumbra a tres niños, proyectándoles sombras de ***1mt***, ***2mt*** y ***3mt*** de longitud. Si sus ubicaciones respecto al farol son respectivamente ***O***, ***NE*** y ***SE*** y además se sabe que tienen la misma estatura ***(1,5 mt)*** se le pide, determinar el área de la región triangular formada por los niños ***(en*** mt^2***)***.

A) $\frac{9}{4}\left(12+5\sqrt{2}\right)$ B) $\frac{9}{2}\left(54+5\sqrt{2}\right)$ C) $\frac{9}{4}\left(27+\sqrt{2}\right)$
D) $\frac{9}{2}\left(27+5\sqrt{2}\right)$ E) $\frac{9}{2}\left(54+\sqrt{2}\right)$

RESOLUCIÓN:



Notemos que : $cot\,\alpha=\dfrac{2}{3}$, $cot\,\beta=\dfrac{4}{3}$, $cot\,\theta=2$

Nos piden : $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta APB}+S_{\Delta APC}+S_{\Delta BPC}$.......***(I)***

$* \; S_{\Delta APB}=\dfrac{4,5\,cot\,\alpha\times 4,5\,cot\,\beta}{2}sen135°$

$\Rightarrow S_{\Delta APB}=\dfrac{81}{8}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{9}{2}\sqrt{2}$.............***(II)***

$* \; S_{\Delta APC}=\dfrac{4,5\,cot\,\alpha\times 4,5\,cot\,\theta}{2}sen135°$

$S_{\Delta APC}=\dfrac{81}{8}\times\dfrac{2}{3}\times 2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{27}{4}\sqrt{2}$.............***(III)***

$* \; S_{\Delta BPC}=\dfrac{4,5\,cot\,\beta.4,5\,cot\,\theta}{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta BPC}=\dfrac{81}{8}\times\dfrac{4}{3}\times 2=27$..........................***(IV)***

*** (II), (III)*** y ***(IV)*** en ***(I) :***

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{18}{4}\sqrt{2}+\dfrac{27}{4}\sqrt{2}+\dfrac{27\times 4}{4}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{9}{4}(5\sqrt{2}+12)$

RPTA : "A"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Al observar la parte superior de una torre, el ángulo de elevación es 53° medido a ***36 m*** de ella , y a una altura de ***12 m*** sobre el suelo. Determinar la altura de la torre.

A) 24 m B) 48 m C) 50 m D) 60 m E) 30 m

02 Al estar ubicados en la parte más alta de un edificio se observan dos puntos ***"A"*** y ***"B"*** en el suelo con ángulo de depresión de ***37°*** y ***53°***. Se pide Determinar la distancia entre estos puntos, si la altura del edificio es de ***120 m***.

A) 70 m B) 90 m C) 120 m D) 160 m E)100 m

03 Desde la orilla de un río se observa la parte más alta de un árbol en la orilla opuesta con un ángulo de elevación de ***60°.*** Alejándose ***20 m*** , el nuevo ángulo es de ***30°***. Determinar la altura del árbol .

A)12 m B)$12\sqrt{3}$***m C)15 m D)***$15\sqrt{3}$***m E)***$10\sqrt{3}$***m***

04 Al observar la parte superior de un obelisco , el ángulo de elevación es ***37°***, medido a ***48 m*** de ella , y a una altura de ***14 m*** sobre el suelo. Determinar la altura del obelisco.

A) 25 m B)15 m C)36 m D)50 m E) 24 m

05 Desde lo alto de un faro ubicado en la playa, se observan dos botes anclados en alta mar y alineados con el con ángulos de depresión iguales a ***30°*** y ***60°*** respectivamente . Si la altura del faro es de $30\sqrt{3}$ ***m***. Determinar la distancia que separa dichos botes .

A) 30 m B)$30\sqrt{3}$***m C)60 m D)***$60\sqrt{3}$***m E)45 m***

06 Al mirar una hormiga la parte más allá de un ladrillo lo hace con un ángulo de elevación de ***60°*** si se aleja una distancia de ***20 cm***. El nuevo ángulo de elevación es de ***30°***. Determinar la altura del ladrillo .

A)10 cm B)$10\sqrt{3}$***cm C)15 cm D)12 cm E)18 cm***

07 A ***16 m*** de la base de un árbol el ángulo de elevación para la parte más alta es ***37°***. Determinar la altura del árbol .

A)10 m B)11 m C)12 m D)13 m E)14 m

08 Si a ***20 m*** de un poste se observa lo alto con un ángulo de elevación de ***37°*** y luego nos acercamos al poste una distancia igual a su altura y el nuevo ángulo de elevación es de θ. Determinar : ***tg*** θ.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

09 Martín observa la parte superior de un muro con un ángulo de elevación θ, cuando la distancia que los separa se ha reducido a su tercera parte , el ángulo de elevación se ha duplicado . Determinar la medida del ángulo θ.

A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

10 Desde un punto en el suelo se observa la parte más alta de un edificio con una elevación angular de **37°**, nos acercamos al edificio una distancia de **10 m** y el nuevo ángulo de elevación para el mismo punto es **45°**. Determinar la altura del edificio .

A) 11 m B) 15 m C) 28 m D) 30 m E) 32 m

11 Desde un punto en el suelo, situado entre **2** muros de **3 m** y $4\sqrt{3}\ m$ se observa sus puntos más altos **con** ángulos de elevación de **30°** y **60°** respectivamente . Determinar la distancia entre dichos puntos .

A) 10 m B) 12 m C) 14 m D)16 m E) 18 m

12 Desde lo alto de un edificio se divisa un objeto en tierra con un ángulo de depresión "β" $(\tan\beta=2,5)$, a una distancia de **40 m** de su base . ¿Cuál es la altura del edificio?

A) 100 m B) 125 C)75 D) 80 E) 120

13 Desde un punto en tierra ubicado a una distancia de **20 m** de una torre, se divisa su parte más alta con un ángulo de elevación "α" $(\tan\alpha=1,5)$. Determinar la altura de la torre.

A) 15 m B) 30 C) 60 D) 40 E) 45

14 Desde lo alto de una torre de 24 m de altura se observa un objeto en el suelo con un ángulo de depresión de **53°**. ¿A qué distancia de la base de la torre se encuentra el objeto?

A) 12 m B) 14 C) 16 D) 18 E) 21

15 Desde la parte alta de un muro de **8 m** de altura, se observa la parte alta y baja de un edificio con ángulos de elevación y depresión de **37°** y **45°** respectivamente . Determinar la altura del edificio.

A) 10 m B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

16 Desde lo alto de un árbol se ve lo alto de un edificio con un ángulo de elevación de **37°**, y se ve también la parte baja con un ángulo de depresión de **53°**. Si la distancia del árbol al edificio es de **12 m**, obtener la suma de las alturas del árbol y el edificio.

A) 37 m B) 38 C) 39 D) 40 E) 41

17 Desde un punto en tierra se divisa lo alto de un poste con un ángulo de elevación "β". Si el punto está a **8 m** de la base del poste, ¿cuál es la altura del poste?

A) $8\tan\beta$ B) $8\cot\beta$ C) $8\,sen\,\beta$ D) $8\cos\beta$ E) $8\csc\beta$

18 Desde lo alto de una montaña de **120 m** de altura , se divisa en el suelo a un objeto con un ángulo de depresión de **32°**. ¿A qué distancia de la base de la montaña se encuentra el objeto?

A) 190,324 m B) 192,04 C)196,1642 D) 168,171 E) 120,32

19 Una persona ubicada a **6 m** de un poste , divisa su parte más alta y base con ángulos de elevación y depresión de **53°** y "β" $\left(\tan\beta=\frac{1}{3}\right)$ respectivamente . Determinar la suma de alturas de la persona y el poste

A) 12 m B) 16 C) 14 d) 10 E) 20

20 Desde un punto en tierra se divisa lo alto de un edificio con ángulo de elevación α nos acercamos a una distancia igual al triple de la altura del edificio y el ángulo de elevación es ahora θ. Determinar : $E=ctg\,\alpha-ctg\,\theta$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

21 Desde lo alto de un edificio de **24m** de altura se divisan dos objetos en tierra con ángulos de depresión de **45°** y **37°**. Si los objetos están a un mismo lado del edificio que distancia los separa .

A) 3 m B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

22 Desde lo alto y bajo de un muro se observa lo alto de un poste con ángulo de elevación de **37°** y **45°** respectivamente . Si la distancia entre el muro y poste es **8** m. Determinar la suma de sus alturas.

A) 6 m B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

23 Una persona de "**h**" de estatura observa un edificio de "**H**" de altura con ángulo de elevación α determine la distancia entre la persona y el edificio .

A) $(H-h)tg\,\alpha$ B) $(H-h)ctg\,\alpha$ C) $(H-h)\sec\alpha$ D) $(H-h)\csc\alpha$ E) $Hh\sec\alpha$

TAREA DOMICILIARIA

01 Una persona de **2** metros de estatura observa la parte más alta de una torre con un ángulo de elevación de **30°**. ¿A qué distancia se encuentra de la base de la torre , si esta mide **82** m?

A) 80 m B)90 C)$80\sqrt{3}$ D)40 E)160

02 Dos edificios separados por una calle de **20 m** de ancho, son observados desde el punto medio de la calle con ángulos que son complementarios . Determine el producto de sus respectivas alturas.

A) 80 B) 90 C) 100 D) 110 E) 120

03 A una distancia de **20 m.** de un poste se observa su parte alta con ángulo de elevación **37°** . Determine la visual.

A) 5 m. B) 15 C) 25 D) 35 E) 40

04 Una persona colocada a una distancia de **36 m** del pie de una torre observa su parte más alta con un ángulo de elevación cuya tangente es **7/12**, Determinar la distancia en la misma dirección que debe alejarse con respecto del punto de observación anterior para que el nuevo ángulo de elevación tenga por tangente **0,25**.

A) 44 *B) 46* *C) 48* *D) 50* *E) 52*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)D	2)A	3)E	4)D	5)C	6)B	7)C	8)C	9)C	10)D
11)A	12)A	13)B	14)D	15)C	16)E	17)A	18)B	19)A	20)
01)C	02)C	03)C	04)C						

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿Cuál es la medida del menor ángulo formado por ***N20°E*** y ***S60°O***?

A) 120° *B) 140°* *C) 100°* *D) 90°* *E) 200°*

02 ¿Cuál es el ángulo formado por las direcciones ***E20°N*** y ***N10°O?***

A) 10° *B) 20°* *C) 80°* *D) 70°* *E) 100°*

03 ¿Cuál es el menor ángulo formado por las direcciones ***E40°S*** y ***S30°O***?

A) 10° *B) 80°* *C) 30°* *D) 70°* *E) 60°*

04 Desde un punto ***"R"*** se divisan dos objetos ***"T"*** y ***"P"*** al este y sur a distancias de ***3*** y ***4*** km respectivamente. Determinar la distancia de separación entre ***"T"*** y ***"P"***.

A) 3 km *B) 4* *C) 5* *D) 6* *E) 10*

05 Desde un barco se divisan dos lanchas al ***S80°E*** y ***N10°E*** a una distancia de ***14*** y ***48 km*** respectivamente. ¿Cuál es la distancia entre las dos lanchas?

A) 25 km *B) 40* *C) 60* *D) 50* *E) 62*

06 Desde un faro se divisan dos barcos al este y al sur a distancias de ***6*** y ***8 km*** respectivamente. Determinar la distancia de separación de los barcos.

A) 8 km *B) 6* *C) 14* *D) 10* *E) 20*

07 Desde un punto ***"P"*** se divisan dos objetos ***"A"*** y ***"B"*** en la dirección $N\,\theta\,E$ y $E\,\theta\,S$ respectivamente, si desde ***"A"*** se divisa a ***"B"*** en la dirección $S\,\alpha\,E$, además: $AB = L$. Determinar la distancia entre ***"A"*** y ***"P"***.

A) $L\cos\theta$ B) $L\cos\alpha$ C) $\theta\cos L$
D) $L\cos(\theta+\alpha)$ E) $L\,sen(\theta+\alpha)$

08 Desde un punto ***"P"*** se divisan dos puntos ***"A"*** y ***"B"*** en las direcciones $N\,\theta\,E$ y $E\,\theta\,S$ respectivamente, si desde ***"B"*** se observa ***"A"*** en la dirección $N\,\alpha\,O$. Determinar ***"PB"***, si: $AB = L$.

A) $P\,sen\,\alpha$ B) $L\cos\theta$ C) $L\,sen(\alpha+\theta)$
D) $L\cos(\alpha+\theta)$ E) $\theta\cos L$

09 Desde dos puntos ***"A"*** y ***"B"*** situados al oeste y norte de una torre, se observa la parte más alta de esta con ángulos de elevación "α" y "β" respectivamente y desde el punto medio entre ***"A"*** y ***"B"*** el ángulo de elevación es "α". Determinar : $\tan\beta.\cot\alpha$

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

10 Desde un punto situado al este de la esquina de un edificio se observa la esquina superior con un ángulo de elevación de ***45°***. Si el vértice opuesto de la cara de este edificio se observa en la dirección ***O30°S***, Determinar su altura si el ancho del edificio es de ***20 m***.

A) 20 m *B) 10* C) $10\sqrt{3}$ D) $15\sqrt{3}$ E) $20\sqrt{3}$

11 A ***20*** m del pie de un poste la elevación angular para lo alto del mismo es de ***37°***. ¿Cuál es la altura del poste?

A) 15 m *B) 12 m* *C) 20 m*
D) 24 m *E) 25 m*

12 Si a ***20*** m de un poste se observa lo alto con un ángulo de elevación de ***37°*** y luego nos acercamos al poste una distancia igual a la de su altura la elevación es "θ". Dterminar $Tg\theta$

A) 1 *B) 3* *C) 5* *D) 7* *E) 9*

13 Desde lo alto de un poste se divisa un objeto en tierra con un ángulo de depresión "α", si el objeto se halla a una distancia de "d" m desde el punto de observación. ¿Cuál es la altura del poste?

A) $dTg\alpha$ B) $dCtg\alpha$ C) $dCos\alpha$
D) $dSec\alpha$ E) $dSen\alpha$

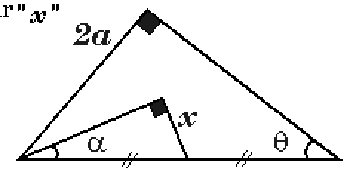
14 Desde la base y la parte superior de una torre se observa la parte superior de un edificio con ángulos de elevación de ***60°*** y ***30°*** respectivamente, si la torre mide ***24*** m entonces la altura del edificio es

A) 36 m B) $24\sqrt{3}$ m *C) 48 m*
D) 72 m E) $48\sqrt{3}$ m

15 Una persona de 2 m de altura observa la parte superior de un poste con un ángulo de elevación "θ" si la persona se acerca 45 m hacia el poste el nuevo ángulo de elevación es "ϕ" si $Ctg\theta - Ctg\phi = 3$, calcular la altura del poste.

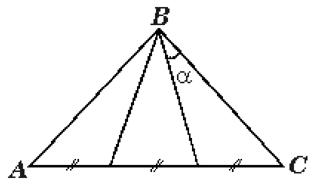
A) $13\ m$ **B)** $15\ m$ **C)** $17\ m$
D) $19\ m$ **E)** $21\ m$

16 Calcular "x"



A) $2aCsc\theta\ Sen\alpha$ B) $aSen\theta\ Csc\theta$
C) $aSen\theta\ Csc\alpha$ D) $aCsc\theta\ Sen\alpha$ E) $a/2\ Sen\theta Csc\alpha$

17 Si ABC es un triángulo equilátero. Determina $Cos\alpha$



A) $\frac{1}{2\sqrt{7}}$ **B)** $\frac{1}{\sqrt{7}}$ **C)** $\frac{5}{2\sqrt{7}}$ **D)** $\frac{2}{\sqrt{7}}$ **E)** N.A.

18 Un mono observa la parte superior de un árbol con un ángulo de elevación "θ". Si el mono camina **12** m hacia el árbol el nuevo ángulo de elevación es de **45°** y acercándose **4** m más el ángulo de elevación es el complemento de "θ". Calcular la altura del árbol

A) 4 m **B)** 6 m **C)** 8 m **D)** 9 m **E)** 10 m

19 Desde la parte superior de una torre se observan dos piedras en el suelo con ángulos de depresión de **37°** y **53°**, si la altura de la torre es 12 m y las piedras están en línea recta y a un mismo lado de la base de la torre. Calcular la distancia entre las piedras.

A) 4 m **B)** 5 m **C)** 6 m **D)** 7 m **E)** 8 m

20 Desde un faro a 15 m sobre el nivel del mar se observa una boya con un ángulo de depresión "α"$(Tg\alpha=1,5)$. En la base del faro a **10** m sobre el nivel del mar se vuelve a observar la misma boya con un ángulo "β". Determinar dicho ángulo

A) 30° **B)** 45° **C)** 60° **D)** 75° **E)** 15°

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Desde lo alto de un edificio se ven tres puntos en Tierra, a un mismo lado, con ángulos de depresión , $\alpha, 45°$ y $90°-\alpha (\alpha<45°)$ si el punto intermedio dista del más alejado, el doble del más cercano, calcular : $N=6Tan\alpha+Cot^2\alpha$

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

02 Un poste, una persona y una torre están ubicados del modo que se mencionan y sus alturas están en la proporción *3*; *1*; *5*. Si de lo alto del poste se divisa lo alto de la persona con un ángulo de depresión "θ"; mientras que la persona divisa lo alto de la torre con un ángulo de elevación a "α" desde lo alto de la torre se ve la base del poste con un ángulo de depresión "ϕ".

Si se verifica que: $Cot\theta = mCot\alpha + nCot\phi$

Calcular: $K = m + 2n$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

03 Tres móviles parten de "P" con direcciones **N30°O**, **O30°S** y **S37°O** con velocidades V_1' V_2 y V_3 respectivamente; notándose al cabo de un cierto tiempo que los tres son colineales, ubicándose el primero al norte del tercero. Calcular el valor de : $H=\frac{V_1^2}{V_2V_3}$

A) $\sqrt{3}$ **B)** $2\sqrt{3}$ **C)** $2,1\sqrt{3}$ **D)** $2,2\sqrt{3}$ **E)** $1,2\sqrt{3}$

04 Un móvil sale de "P" recorriendo una distancia "L" al $N\alpha E$, para luego recorrer la misma distancia "L" al $E\alpha S$ y finalmente una distancia "d" al $S\alpha O$ hasta ubicarse al este de "P".

Hallar "d" en función de "L" y "α". $(\alpha<45°)$

A) $L(1-Sen\alpha)$ **B)** $L(1-Cos\alpha)$ **C)** $L(1-Tan\alpha)$
D) $L(Sec\alpha-1)$ **E)** $L(Csc\alpha-1)$

05 De un puerto, salen tres embarcaciones en las direcciones Oeste, $O\theta S$ y Sur notándose al cabo de un cierto tiempo que la distancia entre las dos primeras, es la tercera parte de la distancia entre las dos últimas. Estando las tres colineales y visualizándose la primera al $N\alpha O$ del tercero.

Calcular el valor de : $P=Cot\alpha Cot\theta$

A) 3 **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** $2\sqrt{3}$ **E)** 9

06 Cuatro ciudades **A,B,C** y **D** están orientados de la siguiente manera : **B** se encuentra al **ONO** de **A** y **C** al **NE** de **A** y **D** se encuentra al **NNE** de **B** y al **NO** de **C**. Si las ciudades **B** y **C** se encuentran a igual distancia de **A**. Hallar en qué dirección se encuentra la ciudad **D** respecto de **A**.

A) $N\frac{1}{4}SE$ **B)** $N\frac{1}{4}SO$ **C)** $N\frac{1}{4}NO$ **D)** $N\frac{1}{4}NE$ **E)** $S\frac{1}{4}NO$

07 Pepe observa a **Ito** al $N\alpha E$ a una distancia :

"d_1" ; pero **Ito** se está desplazando en la dirección $E\theta S$ y después de recorrer una distancia "d" es observado nuevamente por Pepe al $E\alpha N$ a una distancia "d_2"; finalmente recorre otra distancia "d" hasta ubicarse al este de Pepe. Hallar "α"

$A)\,ArcTan\left(\dfrac{d_2}{2d_1}\right)$ $B)\,ArcCot\left(\dfrac{d_2}{2d_1}\right)$ $C)\,ArcTan\left(\dfrac{2d_2}{d_1}\right)$

$D)\,ArcCot\left(\dfrac{2d_2}{d_1}\right)$ $E)\,ArcTan\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)$

08 Dos embarcaciones parten de un puerto hacia el $N\alpha E$ y $S(90°-\alpha)E$ a velocidades de **3km/h** y **4km/h** respectivamente. Si al cabo de dos horas la recta que une ambos barcos corta a la derección Este del puerto en **"M"**. Calcular **"α"** para que la distancia del puerto al punto **"M"** sea mínima

A)37° **B)45°** **C)53°** **D)60°** **E)74°**

09 . Tres moviles salen de un punto **"p"** al Norte, Este y SE con velocidades de **2**, **3** y **4km/h** respectivamente. Después de un cierto tiempo desde el tercero,se ve a los dos primeros en las direcciones $N\alpha O$ y $O\beta N$ respectivamente.Calcular : $N=\dfrac{Cot\alpha-1}{Cot\beta-1}$

$A)\,\dfrac{1}{3}$ $B)\,-\dfrac{1}{3}$ $C)\,\dfrac{2}{3}$ $D)\,-\dfrac{2}{3}$ $E)\,1$

10 Desde un faro , se observa un barco que viaja al **NE**, en la dirección **N15°E** a **10** millas de distancia . Después que el barco recorre $10\sqrt{3}$ millares es visto desde el faro al $E\alpha N$. ¿Cuál es el valor de **"α"** ?

$A)\,\dfrac{\pi}{4}+ArcTan\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $B)\,\dfrac{\pi}{4}+ArcTan\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ $C)\,\dfrac{\pi}{4}+ArcTan\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$D)\,\dfrac{\pi}{4}+ArcTan\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ $E)\,\dfrac{\pi}{4}+ArcTan\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

11 Desde un puerto salen tres embarcaciones en direcciones **N20°E, E40°N** y **E50°S** con velocidades V_1, V_2 , y V_3 respectivamente ; verificándose que, al cabo de un cierto tiempo las tres están perfectamente alineadas. Señale el equivalente de: $N=\dfrac{\sqrt{3}}{V_2}-\dfrac{1}{V_3}$

$A)\,\dfrac{1}{V_1}$ $B)\,\dfrac{2}{V_1}$ $C)\,\dfrac{\sqrt{3}}{2V_1}$ $D)\,\dfrac{\sqrt{3}}{V_1}$ $E)\,\dfrac{1}{2V_1}$

12 Un barco se encuentra en un punto **A** que está a **32** millas y en dirección **N50°E** respecto del punto , denominado **P**, el barco antes de llegar a **P**, se dirige a los puertos **B**, **C** y **D**. Calcular la distancia de **P** a **D**, sabiendo que **B** están al Este de **P** y al sur de **A**; **C** se encuentra en la dirección **S80°O** de **B** y **S10°E** de **P** y **D** está en la dirección **N80°O** de **C** y **S10°O** de **P**.

$(Si: Cos20°Cos40°Cos80°=\dfrac{1}{8})$

A) 2millas **B) 3millas** **C) 4millas**
D) 5millas **E) 6millas**

13 Un maratonista sale de su punto de partida y recorre **300m** al **N37°E** , luego $100\sqrt{2}\,m$ al **NE** y finalmente **250m** al **S16°O**; hasta ubicarse al $E\theta N$ y de su punto de partida . Calcular: $Cot\,\theta$

A)2,1 **B)2,2** **C)2,3** **D)1,75** **E)1,95**

14 Desde un puerto se divisa un barco entrando a la bahía al $N\alpha E$ ($\alpha<45°$) a una distancia **"L"**. Si el barco se desplaza al $S\theta E$, después de qué tiempo , el barco será observado al $E\alpha N$ desde el puerto ; si su velocidad es **"V"**.

$A)\,\dfrac{LCos2\alpha}{VCos(\theta-\alpha)}$ $B)\,\dfrac{LCos2\alpha}{VCos(\theta+\alpha)}$ $C)\,\dfrac{LSen2\alpha}{VCos(\theta+\alpha)}$

$D)\,\dfrac{LSen2\alpha}{VCos(\theta-\alpha)}$ $E)\,\dfrac{LCos2\theta}{VCos(\theta-\alpha)}$

15 Tres personas salen de un mismo punto en las derecciones $N\alpha O$, $O\alpha S$ y **SE** con velocidades proporcionales a los números $1;1$ y $\sqrt{2}$ respectivamente . Al cabo de un cierto tiempo, desde la tercera se divisa a la primera en la dirección **NxO** y a la segunda al **O y N.**

Señale el equivalente de $K=\sqrt{CotxCoty}$

$A)\,Cos\alpha+1$ $B)\,Cot\alpha+1$ $C)\,Sec\alpha+1$
$D)\,Tan\alpha+1$ $E)\,Csc\alpha+1$

16 Un maratonista sale de un punto **"P"** ubicado al Este de un estrado, y se desplaza hacia Norte. Desde el estrado lo ven al $E\phi N$ y luego al $E(\phi+\theta)N$; notándose que las distancias recorridas para la primera y segunda observación, son iguales. Calcular el mínimo valor de $Cot\,\theta$

$A)\,\sqrt{2}$ $B)\,2\sqrt{2}$ $C)\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $D)\,3\sqrt{2}$ $E)\,4\sqrt{2}$

17. Una persona decide viajar y sale de su pueblo **"A"** en la dirección $N(90°-\alpha)E$ llegando a una ciudad **"B"** en la cual decide tomar el rumbo $S(900-2\alpha)E$ y llega al pueblo **"C"**, finalmente decide retornar a su lugar de origen y se enrumba según $N4\alpha O$. Calcular **"α"** , si se sabe que de A hacia **"B"** existe la misma distancia que de **"B"** hacia **"C"**.

A)10° **B)15°** **C)30°** **D)20°** **E)40°**

18 Dos barcos parten al mismo tiempo de un punto **"A"** siguiendo rumbos $NE\dfrac{1}{4}N$ y $E\dfrac{1}{4}SE$, cuando el primero recorre $(2-\sqrt{2})$ millas observa al segundo con dirección $SE\dfrac{1}{4}E$. Calcular la distancia que separa a los barcos en ese enstante.

$A)\,1milla$ $B)\,2millas$ $C)\,\sqrt{2}millas$
$D)\,2\sqrt{2}millas$ $E)\,(2+\sqrt{2})millas$

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)D	2)C	3)E	4)C	5)A	6)C	7)D	8)C	9)D	10)D
11)B	12)C	13)A	14)A	15)C	16)B	17)D	18)C		