UNIDAD 1

UTILICEMOS SUCESIONES ARITMETICAS Y GEOMETRICAS

	COMPLEJO EDUCATIVO CANTON TUTULTEPEQUE **GUION DE CLASE** *Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.*	*Grado: 2º año de bachillerato* *Asignatura: Matemática* *Tiempo:_______________* *Periodo: _______________*

UNIDAD 1. ESTUDIEMOS SUCESIONES ARITMETICAS Y GEOMETRICAS. *Objetivo de unidad: Utilizar, mediante la deducción y aplicación de su término general, las sucesiones aritméticas y geométricas en la solución de situaciones problemáticas que corresponda a los intervalos específicos.*	***Metodología:*** *La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.*

CONTENIDOS CONCEPTUALES	***CONTENIDOS PROCEDIMENTALES***	***CONTENIDOS ACTITUDINALES***
1. Sucesiones aritméticas *1.1 Características.* *1.2 Término general.* *1.3 Medios aritméticos* ***1.4*** *Suma de términos de una sucesión aritmética*	✓ *Identificación de una sucesión aritmética.* ✓ *Cálculo del n-ésimo término de una sucesión aritmética.* ✓ *Utilización del término general para calcular cualquier término de una sucesión aritmética.* ✓ *Identificación y cálculo de los medios aritméticos entre dos términos de una sucesión aritmética.* ✓ *Aplicación de la fórmula para la obtención de la suma de los primeros términos de una sucesión aritmética.*	✓ *Interés y seguridad al identificar las sucesiones aritméticas.* ✓ *Seguridad al calcular la expresión del n-ésimo término de la sucesión aritmética.* ✓ *Interés por calcular medios aritméticos.* ✓ *Precisión al obtener la suma de los términos de una sucesión aritmética.*

Objetivo: *que el alumno sea capaz de:* ✓ *Identificar una sucesión aritmética.* ✓ *Calcular el n-ésimo término de una sucesión aritmética.* ✓ *Utilizar el término general para calcular cualquier término de una sucesión aritmética.* ✓ *Identificar y calcular de los medios aritméticos entre dos términos de una sucesión aritmética.* ✓ *Aplicar la fórmula para la obtención de la suma de los primeros términos de una sucesión aritmética.*	***Material de Apoyo*** • *Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio.* • *Matemática 1º año de bachillerato Santillana (pioneros)*
Indicadores de logro. ✓ *Identifica con interés y seguridad una sucesión aritmética.* ✓ *Deduce y explica con perseverancia y confianza el término general de una sucesión aritmética.* ✓ *Calcula con seguridad el n-ésimo término de una sucesión aritmética.* ✓ *Aplica correctamente y con precisión la fórmula para obtener la suma de los primeros términos de una sucesión aritmética.*	***Evaluación:*** *Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.* ✓ *Orden y aseo 5%* ✓ *Puntualidad 5%* ✓ *Desarrollo correcto 90%*

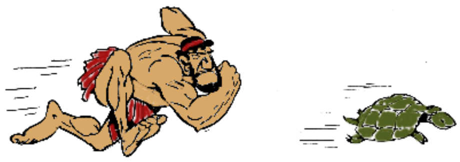
Actividad	*Tiempo*
1. Bienvenida y asistencia	
2. Presentación del contenido y objetivo de la clase	
3. Exploración de Conocimientos Previos	
4. Introducción a la temática	
5. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
6. Delegación de actividades y cierre	
Tiempo Hora Clase	

Actividad Diagnostica:
Entra al siguiente link
http://rolandotzun.wordpress.com/
Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

SUCESIONES ARITMETICAS Y GEOMETRICAS

El filósofo Griego Zenón de Elea, que vivía en el siglo V antes de Cristo, es famoso por las paradojas que planteo a sus contemporáneos y que causaron el asombro de estos. Una de las más famosas es la de Aquiles (mítico guerrero griego notable por su velocidad) y la tortuga.

Dice así:



Aquiles y una tortuga apostaron a correr. Como Aquiles sabía que corría diez veces más rápido que el reptil, decidió darle 100 m de ventaja. Entonces dice Zenón: Aquiles nunca podrá alcanzar a la tortuga; porque cuando llegue al punto de partida de la tortuga, esta habrá recorrido 10 m, cuando Aquiles recorra estos 10 m, entonces la tortuga habrá recorrerá 1/10 de metro. Al recorrer Aquiles la décima parte del metro, entonces la tortuga habrá recorrido 1/100 de metro. En el momento que Aquiles alcance el final de la centésima de metro, la tortuga llevara una ventaja de 1/1000 de metro. AL seguir de la misma manera, decía Zenón, Aquiles se acerca cada vez más a la tortuga: pero nunca podrá alcanzarla.

Sucesiones.
Definición: Se llama Sucesión a una función cuyo Dominio es el conjunto de los números Naturales N.

Los elementos del recorrido de una sucesión reciben el nombre de términos de la sucesión.

Ejemplo 1.
Si el dominio de la sunción $f(x) = 2x + 3$ es el conjunto de los números naturales, encontrar los elementos del recorrido, es decir, los términos de la sucesión.

Solución:

Dominio		**Recorrido**
1	------→	$f(1) = 2(1) + 3 = 5$
2	------→	$f(1) = 2(1) + 3 = 5$
3	------→	$f(1) = 2(1) + 3 = 5$
4	------→	$f(1) = 2(1) + 3 = 5$

Según esto, los términos de la sucesión son:

$$\{5, 7, 9, 11, \dots\}$$

Cuando se enumeran los términos de una sucesión se acostumbra suprimir las llaves y también escribir el termino n-ésimo, es decir el que resulta des sustituir x por n, donde n es un numero natural desconocido.

Así, en nuestro ejemplo, los términos de la sucesión son:

$$5, 7, 9, 11, \dots, 2n + 3$$

El término $f(n) = 2n + 3$ recibe el nombre de término general de la sucesión y es la misma ley de asignación de la función, con la única diferencia que en vez de x aparece n.

A partir del término general de una sucesión, se obtienen todos los términos restantes.

Ejemplo 2:
Encontrar los cinco primeros términos de la sucesión cuyo término general es $f(n) = \frac{1}{n}$

Solución:

$$f(1) = 1 \quad f(2) = \frac{1}{2} \quad f(3) = \frac{1}{3} \quad f(4) = \frac{1}{4} \quad f(5) = \frac{1}{5}$$

Los cinco primeros términos de la sucesión son:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}$$

Ejemplo 3:
Encontrar los términos de la sucesión cuyo término general es:

$f(n) = 1 + (-1)^n$

Solución:

$f(1) = 1 + (-1)^1 = 1 + (-1) = 0$
$f(1) = 1 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$
$f(1) = 1 + (-1)^3 = 1 + (-1) = 0$
$f(1) = 1 + (-1)^1 = 1 + 1 = 2$
.
.
.
$f(n) = 1 + (-1)^n$

Los términos de la sucesión son:

$$0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots, 1 + (-1)^n$$

Ejemplo 4.
Encontrar los términos segundo, quinto, octavo y decimo de la sucesión cuyo término general.

$$f(n) = \frac{2^{n-1}}{4n + 1}$$

Solución:

$$f(2) = \frac{2^{2-1}}{4(2) + 1} = \frac{2}{9}$$

$$f(8) = \frac{2^{8-1}}{4(8) + 1} = \frac{128}{33}$$

$$f(10) = \frac{2^{10-1}}{4(10) + 1} = \frac{512}{41}$$

Definición:
Se dice que una sucesión es Aritmética cuando la diferencia entre un término y otro cualquiera y el anterior es constante.

Ejemplo 5:
Los términos 4, 9, 14, 19,…, 5n-1 pertenecen a una sucesión aritmética, puesto que la diferencia entre un término cualquiera y el anterior es constante e igual a cinco.

Definición:
Se dice que una sucesión es Geométrica si el cociente entre un término cualquiera y el anterior es constante. El cociente constante recibe el nombre de razón.

Ejemplo 6.
Los términos $2, 4, 8, 18, 32, \dots, 2^n$ pertenecen a una sucesión geométrica, porque al dividir un término entre el anterior el cociente es constante e igual a dos. Es decir que la razón es 2.

Existen sucesiones que no son geométricas ni aritméticas.

Ejemplo 7.
Los términos $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}. \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \dots, \frac{1}{3n-1}$ pertenecen a una sucesión que no es geométrica, ni aritmética.

ACTIVIDAD
Para cada caso escribe los cinco primeros términos de la sucesión:

1. $f(n) = 2n - 3$
2. $f(n) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
3. $f(n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
4. $f(n) = \frac{3-n^2}{n^2+1}$
5. $f(n) = \frac{2^n}{n^2}$
6. $f(n) = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$
7. $f(n) = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$
8. $f(n) = 2(1 + (-1)^{n-1})$
9. $f(n) = (1 - n)^n$
10. $f(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}$
11. $f(n) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$
12. $f(n) = 2 - (-1)^{n-1}$
13. $f(n) = n^n$
14. $f(n) = n^2 + (-1)^n * n$
15. $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$
16. $f(n) = \left[\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}\right]$

Indica en cada caso si el término general corresponde a una sucesión aritmética, geométrica o a ninguna de ambas.

17. $f(n) = 2 - 3n$
18. $f(n) = \frac{n+4}{2}$
19. $f(n) = 5n$
20. $f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
21. $f(n) = 2n$
22. $f(n) = \frac{\ln(n^2)}{n}$
23. $f(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
24. $f(n) = 2^n$
25. $f(n) = n^2$
26. $f(n) = \frac{2n}{2n-1}$
27. $f(n) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
28. $f(n) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n^2}$
29. $f(n) = \frac{n}{e^n}$
30. $f(n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

SUCESIONES ARITMETICAS

Hasta ahora se ha proporcionado el término general de una sucesión y a partir de él se nos ha pedido que obtengamos algunos términos. Sin embargo, en muchas ocasiones el proceso se invierte, es decir que, se nos proporcionan algunos términos de la sucesión y se nos pide que construyamos el término general que da origen a dicha sucesión.

En el caso de sucesiones aritméticas el término general se calcula en 2 etapas:

Etapa 1.
La primera parte del término general se obtiene multiplicando por "n" la diferencia que hay entre dos términos consecutivos.

Etapa 2.
AL sustituir "n" por 1 en la expresión que se ha construido en la etapa anterior, deberá obtenerse el primer término de la sucesión. Si esto no ocurre, porque hay una diferencia, ya sea por exceso o por defecto, entonces a la expresión obtenida en la etapa 1 deberá restársele o sumársele, según el caso, dicha diferencia y este será el término general.

Ejemplo 1:
Encontrar el término general de la sucesión cuyos términos son:

$$2, 5, 8, 11. 14, \ldots$$

Solución:
Podemos observar que se trata de una sucesión aritmética, puesto que la diferencia de término a término es constante e igual a tres.

EL término general se obtiene de la manera siguiente:

1) Diferencia entre dos términos consecutivos es 3. Por tanto la primera parte del termino general es $\boldsymbol{3n}$
2) Al sustituir n por 1 resulta: $3(1) = 3$ Este número rebasa al primer término de la sucesión, que es 2, por 1; entonces el termino general resulta ser:

$$f(n) = 3n - 1$$

Verifiquemos nuestro resultado:

Dominio		**Términos de la Sucesión**
1	------------------->	$f(1) = 3(1) - 1 = 3 - 1 = 2$
2	------------------->	$f(2) = 3(2) - 1 = 6 - 1 = 5$
3	------------------->	$f(3) = 3(3) - 1 = 9 - 1 = 8$
4	------------------->	$f(4) = 3(4) - 1 = 12 - 1 = 11$
5	------------------->	$f(5) = 3(5) - 1 = 15 - 1 = 14$

Efectivamente, el término buscado es $f(n) = 3n - 1$

Ejemplo 2:
Encontrar el término general de la sucesión cuyos términos son:

$$8, 13, 18, 23, 28, \ldots$$

Solución:
La diferencia entre dos términos consecutivos es constante e igual a 5.

$$\boldsymbol{5n}$$

Al sustituir "n" por 2 resulta $5(1) = 5$ a este resultado le faltan tres unidades para ser igual al primer término, que es 8. Por lo tanto el término general buscado es:

$$\boldsymbol{f(n) = 5n + 3}$$

Ejemplo 3.
Encontrar el término general de la sucesión cuyos términos son: $\frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \frac{11}{5}, \frac{13}{5} \ldots$

Solución:

1) Es una cuestión aritmética en la cual la diferencia entre dos términos consecutivos es constante e igual a $\frac{2}{5}$
   La primera parte del término general es: $\boldsymbol{\frac{2}{5}n}$

2) Al sustituir "n" por 1 resulta $\frac{2}{5}(1) = \frac{2}{5}$

   A este resultado debe sumársele $\frac{1}{5}$ para que sea igual al primer término. El término general buscado es entonces:

$$\boldsymbol{f(n) = \frac{2}{5}n + \frac{1}{5}}$$

Ejemplo 4.
Encontrar el término general de la sucesión cuyos términos son:

$$\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \ldots$$

Solución:
1) La diferencia entre dos términos consecutivos es

La primera parte del término general es por tanto: $\boldsymbol{-\frac{1}{2}n}$

2) Al sustituir "n" por 1 resulta $\frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$

A este resultado debe sumársele 1 para que sea igual al primer término, resultando así que el término general buscado es:

$$\boldsymbol{f(n) = -\frac{1}{2}n + 1}$$

Gracias a estos ejemplos podemos darnos cuenta que el término general de una sucesión aritmética se construye siempre de la misma manera:

Multiplicando por "n" una constante "a" que no es más que la diferencia entre un termino con el anterior termino y luego sumándole otra constante "b"

El término general de una sucesión aritmética siempre tiene la forma siguiente:

$$\boldsymbol{f(n) = an + b}$$

Esta es la forma de una función lineal, donde a ^ b son números constantes.

ACTIVIDAD
Encontrar el término general de la sucesión, cuyos primeros términos se dan:

1. $5, 7, 9, 11, 13, \ldots$
2. $1, \frac{5}{2}, 4, \frac{11}{2}, 7, \ldots$
3. $-6, -2, 2, 6, 10, \ldots$
4. $-\frac{1}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{8}{4}, -\frac{11}{4}, \ldots$
5. $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \ldots$
6. $-1, 3, 7, 11, 15, \ldots$
7. $2, -3, -8, -13, -18, \ldots$
8. $\frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{9}{6}, \frac{11}{6}, \frac{13}{6}, \ldots$
9. $\frac{9}{4}, \frac{19}{4}, \frac{29}{4}, \frac{39}{4}, \frac{49}{4}, \ldots$
10. $-\frac{17}{5}, -\frac{19}{5}, -\frac{21}{5}, -\frac{23}{5}, -5. \ldots$

11. Encuentra el término que ocupa la posición 350 dentro de la sucesión:
$$1, 7, 13, 19, 25, \ldots$$

12. Los términos de una sesión son: $-89, -78, -67, -56, -45, ..$ Encuentre el término que ocupa la posición 111

13. Los términos de una sucesión son: $-\frac{1}{2}, -\frac{7}{6}, -\frac{11}{6}, -\frac{5}{2}, -\frac{19}{6} \ldots$ Encuentre el término que ocupa la posición 1,000

14. Encuentra el 7º término de la sucesión aritmética cuyo primer término es 2 y cuyo decimo termino es 65.

15. Encuentra el término que ocupa la posición 80 en una sucesión aritmética cuyo segundo término es 19 y en la cual el término que ocupa la posición 150 es 1,499

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS ARITMÉTICOS.

La interpolación de medios aritméticos no es más que el proceso de colocar entre dos números reales dados un número específico de términos que junto con los datos originalmente pertenezcan a una sucesión aritmética.

Ejemplo 1
Interpolar tres medios aritméticos entre 11 y 23.

Solución.
Sabemos que el término general de una sucesión aritmética es de la forma

$$f(n) = an + b$$

Debemos encontrar por tanto el valor de a y el de "b"

Como entre 11 y 23 se van a intercalar tres términos más, entonces se tendrán cinco términos de la sucesión, el primero de los cuales será once y el quinto termino será 23.

Primer término: $f(1) = a(1) + b \Longrightarrow a + b = 11$
Quinto termino: $f(5) = a(5) + b \Longrightarrow 5a + b = 23$

Al restar término a término se tiene:

$$\begin{array}{c} 5a + b = 23 \\ \underline{1a + b = 11} \\ 4a = 12 \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{c} a = \dfrac{12}{4} \\ \\ a = 3 \end{array}$$

Al sustituir este valor en $a + b = 11$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} 3 + b &= 11 \\ b &= 11 - 3 \\ b &= 8 \end{aligned}$$

El término general de la sucesión es por tanto: $\boldsymbol{f(n) = 3n + 8}$

Los medios aritméticos son entonces

$$\begin{aligned} f(2) = 3(2) + 8 = 14 \\ f(3) = 3(3) + 8 = 17 \\ f(4) = 3(4) + 8 = 20 \end{aligned}$$

Los términos interpolados son:

$$11, 14, 17, 20, 23$$

Ejemplo 2.
Interpolar 6 medios aritméticos entre 10 y 73.

Solución:
Habrá 8 términos en total

Primer termino $f(1) = a(1) + b = 10$
Octavo termino $f(8) = a(8) + b = 73$

Restamos término a término

$$\begin{array}{c} 8a + b = 73 \\ \underline{1a + b = 10} \\ 7a = 63 \end{array}$$

$$a = \frac{63}{7}$$

$$a = 9$$

Al sustituir este valor en $a + b = 10$ se obtiene que:

$$\begin{gathered} 9 + b = 10 \\ b = 10 - 9 \\ b = 1 \end{gathered}$$

El término general de la sucesión es por tanto: $\boldsymbol{f(n) = 9n + 1}$

Los seis medios aritméticos son:

$$\begin{gathered} f(2) = 9(2) + 1 = 19 \\ f(3) = 9(3) + 1 = 28 \\ f(4) = 9(4) + 1 = 37 \\ f(5) = 9(5) + 1 = 46 \\ f(6) = 9(6) + 1 = 55 \\ f(7) = 9(7) + 1 = 64 \end{gathered}$$

EL total de términos interpolados es:

$$10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, \ldots$$

Ejemplo 3.
Interpolar 11 medios aritméticos entre y 108

Solución:
Habrá 13 términos en total.

Primer termino $f(1) = a(1) + b = 6 \Rightarrow a + b = 6$
Treceavo termino $f(13) = a(13) + b = 108 \Longrightarrow 13a + b = 108$

Restamos término a término.

$$\begin{array}{c} 13a + b = 108 \\ \underline{1a + b = 6} \\ 12a = 102 \end{array}$$

$$a = \frac{102}{12}$$

$$a = \frac{17}{2}$$

Al sustituir este valor en $a + b = 6$ se obtiene que:

$$\frac{17}{2} + b = 6 \Rightarrow b = 6 - \frac{17}{2} \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$$

El término general de la sucesión es por tanto: $\boldsymbol{f(n)} = \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{n} - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$

Los once medios aritméticos son:

$$f(2) = \frac{17}{2}(2) - \frac{5}{2} = \frac{29}{2}$$
$$f(3) = \frac{17}{2}(3) - \frac{5}{2} = \frac{46}{2}$$
$$f(4) = \frac{17}{2}(4) - \frac{5}{2} = \frac{63}{2}$$
$$f(5) = \frac{17}{2}(5) - \frac{5}{2} = \frac{80}{2}$$
$$f(6) = \frac{17}{2}(6) - \frac{5}{2} = \frac{97}{2}$$
$$f(7) = \frac{17}{2}(7) - \frac{5}{2} = \frac{114}{2}$$
$$f(8) = \frac{17}{2}(8) - \frac{5}{2} = \frac{131}{2}$$
$$f(9) = \frac{17}{2}(9) - \frac{5}{2} = \frac{148}{2}$$
$$f(10) = \frac{17}{2}(10) - \frac{5}{2} = \frac{165}{2}$$
$$f(11) = \frac{17}{2}(11) - \frac{5}{2} = \frac{189}{2}$$
$$f(12) = \frac{17}{2}(12) - \frac{5}{2} = \frac{199}{2}$$

EL total de términos interpolados es:

$$6, \frac{29}{2}, \frac{46}{2}, \frac{63}{2}, \frac{80}{2}, \frac{97}{2}, \frac{114}{2}, \frac{131}{2}, \frac{148}{2}, \frac{165}{2}, \frac{189}{2}, \frac{199}{2}, 108$$

SUMA DE LOS "N" PRIMEROS TÉRMINOS DE UNA SUCESIÓN ARITMÉTICA.

Calcular la suma de los "n" primeros términos de una sucesión aritmética es bastante sencillo, porque en toda sucesión aritmética se cumple:
La suma del primero y último término es igual a la suma del segundo con el penúltimo, a la suma del tercero con el antepenúltimo y a la suma de dos términos cualesquiera que equidisten de los valores extremos.

Ejemplo 1
Para la siguiente sucesión $1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n-1$
Calcular la suma de los 20 primeros términos.

Solución:

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31+33+35+37+39$$

40

La suma del primero y último término, así como la suma de cada pareja de números unidas por la flecha es siempre igual a 40.

Como hay 100 parejas de números y la suma de cada pareja es 40, se tiene que la suma total es:

$$10(40) = 400$$

Ejemplo 2.
Para $-\frac{3}{2}, -1,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1, \dots, \frac{1}{2}n-2$
Calcular la suma de los primeros 17 términos.

Solución:

$$-\frac{3}{2}-1-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+3+\frac{7}{2}+4+\frac{9}{2}+5+\frac{11}{2}+6+\frac{13}{2}$$

5

La suma del primero y último término es 5. Hay 8 parejas cuya suma es 5 y un término más cuyo valor es la mitad de 5, es decir $\frac{5}{2}$. La suma es por lo tanto

$$8(5)+\frac{5}{2} = 42.25$$

Ejemplo 3.
Calcular la suma de los términos: 2, 9, 16, 23,…, 597

Solución:
En este caso lo primero que debemos hacer es encontrar el número de términos y esto se consigue con ayuda del término general.
El término general es $f(n) = 7n - 5$

Ahora igualamos el término general con el último término para conocer el valor de "n"

$7n - 5 = 597$

$7n = 597 + 5$

$7n = 602$

$n = \frac{602}{7}$

$n = 86$

Hay 86 términos y por lo tanto 43 parejas.
La suma del primero y último término es: 597+2=599
La suma total de los 86 términos es por lo tanto $599(43) = 25{,}757$

Ejemplo 4.
Calcular la suma: $-1 + (-5) + (-9) + \cdots + (-465)$

Solución:
El término general es $f(n) = -4n + 3$
Al igualar con el último término se tiene:

$-4n + 3 = -465$

$4n = 465 + 3$

$4n = 468$

$n = \frac{468}{4}$

$n = 117$

Hay un número impar de términos. Por tanto hay 58 parejas y un término restante.

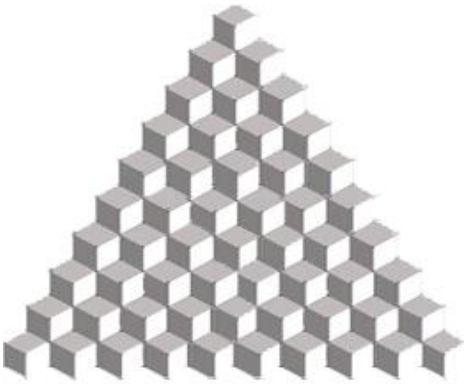
La suma del primero y el último término es $-1 + (-465) = -466$
El término restante es $\frac{-466}{2} = -233$
La suma total es por tanto

$$-466(58) - 233 = -27{,}261$$

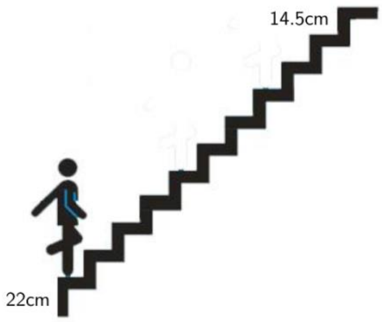
ACTIVIDAD
1) Interpolar 4 medios aritméticos entre 15 y 40.
2) Interpolar 8 medios aritméticos entre 25 y 70.
3) Interpolar 3 medios aritméticos entre 3 y 14.
4) Interpolar 5 medios aritméticos entre 4 y 50.
5) Interpolar 6 medios aritméticos entre 43 y 92
6) Interpolar 11 medios aritméticos entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{25}{3}$
7) Interpolar 7 medios aritméticos entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{7}{3}$

8) Interpolar 9 medios aritméticos entre 111 y 351
9) Interpolar 10 medios aritméticos entre $\frac{3}{5}$ y 20
10) Interpolar 6 medios aritméticos entre $-\frac{23}{2}$ y 0
11) Calcular la suma de los primeros 100 números naturales.
12) Calcula la suma de los 40 primeros términos de la sucesión cuyo término general es $f(n) = \frac{2n-5}{3}$
13) Calcular la suma de los primeros 51 términos de la sucesión cuyo término general es $f(n) = \frac{4-3n}{2}$
14) Calcular la suma $5 + 10 + 15 + \cdots + 5{,}000$
15) Calcular la suma $10 + 20 + 30 + \cdots + 990$
16) Calcular la suma de todos los números pares mayores que 1 y menores que 1,000
17) Calcular la suma de todos los números impares mayores que 1 y menores que 1,000
18) Para 6, 13, 20, 27, 34,… calcular la suma de los primeros 80 términos.
19) Para -2, 4, 10, 16, 22, … Calcular la suma de los primeros 93 términos
20) Calcular la suma $\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + \frac{5}{4} + 2 + \cdots + 149$
21) Calcular la suma $\frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(-\frac{117}{2}\right)$
22) El primer término de una sucesión aritmética es 1 y el último es 397. Si la suma total es 20,298 ¿Cuántos términos se sumaron?
23) El primer término de una sucesión aritmética es 3y el ultimo es 473. Si la suma total es 38,794 ¿Cuántos términos se sumaron?
24) Un señor desea que en su casa le levanten un muro con 900 ladrillos. Antes de ordenar el trabajo consulta con varios albañiles ¿Cuánto le cobrarían? Los albañiles consultados le responden los siguiente:
    Juan: Yo le gano $4,000 por poner todos los ladrillos.
    Pedro: Yo le gano $0.01 por el primer ladrillo, $0.02 por el segundo, $0.03 por el tercero y así sucesivamente hasta llegar al último.
    Gabriel: Yo le cobrare $1 por los primeros dos ladrillos, $1.03 por los otros dos ladrillos, $1.06 por las siguientes dos y así sucesivamente hasta llegar a las últimas dos.
    Jorge: Yo le cobrare $5 dólares por los primeros 10 ladrillos $6 por los otros diez, $7 por los siguientes 10 y así sucesivamente hasta completar los 900 ladrillos
    ¿Cuál oferta conviene al señor?
25) Una pila de ladrillos tiene 48 en la fila inferior, 46 en la segunda, 44 en la tercera y así sucesivamente hasta la última fila que solamente tiene 2. Encuentra el número total de ladrillos.
26) Don Toño tiene apilados 50 arbolitos de café, los cuales debe sembrar en línea recta. El primero de ellos a 6 metros de donde él se encuentra, y cada uno de los otros a 6m del anterior. SI Don Toño solamente puede cargar un arbolito por vez y al terminar de sembrar el último arbolito regresa al punto de partida, que es donde tenía apilados los 50 arbolitos ¿Cuál es la distancia total que ha caminado Don Toño?
27) En un estadio de futbol la primera grada tiene capacidad para 489 aficionados y cada una de las gradas siguientes tiene una capacidad de 62 aficionados más, que los de la grada inferior a ella. Si el estadio consta de 54 gradas ¿Cuál es la capacidad del estadio?
28) Una piedra desciende rodando por una montaña. En el primer segundo recorre 5m y en cada uno de los siguientes segundos aumenta su recorrido en 6m respecto al segundo anterior. Si termina de caer a los 16 segundos ¿Cuál es la distancia recorrida?

29) Si todos los cubos son del mismo tamaño. ¿Cuantos cubos hay?



30) En un edificio se van a construir escaleras de 11 peldaños, para subir de un piso a otro. Si se desea que la altura del primer escalon sea de 22cm y que apartir de ahí las alturas de los escalones siguientes decrezcan de manera uniforme, de tal manera que la altura del ultimo sea de 14.5 cm ¿Cuáles deben ser la altura de los 9 peldaños intermedios?



	COMPLEJO EDUCATIVO CANTON TUTULTEPEQUE **GUION DE CLASE** *Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.*	*Grado: 2º año de bachillerato* *Asignatura: Matemática* *Tiempo:_______________* *Periodo: _______________*

UNIDAD 1. ESTUDIEMOS SUCESIONES ARITMETICAS Y GEOMETRICAS. *Objetivo de unidad: Utilizar, mediante la deducción y aplicación de su término general, las sucesiones aritméticas y geométricas en la solución de situaciones problemáticas que corresponda a los intervalos específicos.*	***Metodología:*** *La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.*

CONTENIDOS CONCEPTUALES	***CONTENIDOS PROCEDIMENTALES***	***CONTENIDOS ACTITUDINALES***
2 Sucesiones geométricas *2.1 Características:* *2.2 Término general.* *2.3 Medios geométricos* *2.4 Suma de términos de una sucesión geométrica:*	✓ *Identificación, determinación y explicación de una sucesión geométrica.* ✓ *Deducción y explicación del término general de una sucesión geométrica.* ✓ *Identificación y cálculo de los medios geométricos entre dos términos de una sucesión geométrica.* ✓ *Aplicación de la fórmula para la obtención de la suma de los términos de una sucesión geométrica.*	✓ *Interés y seguridad al identificar las sucesiones geométricas.* ✓ *Interés y seguridad al deducir la regla que siguen los términos de una sucesión geométrica.* ✓ *Seguridad en el uso del término general de una sucesión geométrica.* ✓ *Identificación y cálculo de los medios geométricos entre dos términos de una sucesión geométrica*

Objetivo: *que el alumno sea capaz de:*
- ✓ *Identifica, explica y describe con interés y seguridad las características de una sucesión geométrica.*
- ✓ *Deduce y explica con interés y seguridad el término general de una sucesión geométrica.*
- ✓ *Identifica y calcula con seguridad e interés los medios geométricos entre dos términos de una sucesión geométrica.*
- ✓ *Aplica con precisión la fórmula para la obtención de la suma de los términos de una sucesión geométrica.*

Material de Apoyo
- *Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio.*
- *Matemática 1º año de bachillerato Santillana (pioneros)*

Indicadores de logro.
- ✓ *Identifica con interés y seguridad una sucesión Geométrica.*
- ✓ *Deduce y explica con perseverancia y confianza el término general de una sucesión Geométrica.*
- ✓ *Calcula con seguridad el n-ésimo término de una sucesión Geométrica.*
- ✓ *Aplica correctamente y con precisión la fórmula para obtener la suma de los primeros términos de una sucesión Geométrica.*

Evaluación:
Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.
- ✓ *Orden y aseo 5%*
- ✓ *Puntualidad 5%*
- ✓ *Desarrollo correcto 90%*

Actividad	*Tiempo*
7. Bienvenida y asistencia	
8. Presentación del contenido y objetivo de la clase	
9. Exploración de Conocimientos Previos	
10. Introducción a la temática	
11. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
12. Delegación de actividades y cierre	
Tiempo Hora Clase	

Actividad Diagnostica:
Entra al siguiente link
http://rolandotzun.wordpress.com/
Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

SUCESIONES GEOMETRICAS

Recordemos que una sucesión es geométrica si el cociente entre dos términos consecutivos es constante.

CALCULO DEL TÉRMINO GENERAL DE UNA SUCESIÓN GEOMÉTRICA.

El término general de una sucesión geométrica se calcula en dos etapas de la siguiente manera.

Etapa 1
La primera parte del término general se obtiene elevando a la potencia "n" el cociente entre dos términos consecutivos.

Etapa 2
AL sustituir "n" por 1, en la expresión que se ha obtenido en la etapa anterior, debería obtenerse el primer término de la sucesión. Si esto no ocurre, entonces deberá multiplicarse la expresión por la constante necesaria para obtener dicho primer término.

Ejemplo 1.
Obtener el término general de 9, 27, 81, 243,...

Solución.
El cociente entre un término y el anterior es constante e igual a 3.
1) La primera parte del termino general es por lo tanto 3^n
2) Al sustituir "n" por 1 se tiene $3^1 = 3$
3) Este número debe multiplicarse por 3 para obtener el primer término de la sucesión que es 9. Por lo tanto el termino general buscado es:

$$\boldsymbol{f(n) = 3 * 3^n = 3^{n+1}}$$

Los términos de la sucesión son:

$$3^2, 3^3, 3^4, 3^5, \ldots 3^{n+1}$$

Ejemplo 2:
Obtener el termino general de $\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{16}{5}, \frac{32}{5}, \ldots$

Solución:
El cociente entre un término y el anterior es constante e igual a 2.
1) La primera parte del termino general es por tanto 2^n
2) Al sustituir "n" por 1 se tiene $2^1 = 2$
3) Este número debe multiplicarse por $\frac{1}{5}$ para obtener el primer término de la sucesión que es $\frac{2}{5}$. Por lo tanto el término general buscado es:

$$\boldsymbol{f(n) = \frac{1}{5} * 2^n = \frac{2^n}{5}}$$

Los términos de la sucesión son:

$$\frac{2}{5},\frac{2^2}{5},\frac{2^3}{5},\frac{2^4}{5},\dots,\frac{2^n}{5}$$

Ejemplo 3.
El termino general de $-\frac{7}{8},\frac{7}{32},-\frac{7}{128},\frac{7}{512},-\frac{7}{2{,}048},\dots$

Solución:
El cociente entre un término y el anterior es constante e igual a $-\frac{1}{4}$

1) La primera parte del termino general es por lo tanto: $\left(-\frac{1}{4}\right)^n$
2) Al sustituir "n" por 1 se obtiene $\left(-\frac{1}{4}\right)^1 = -\frac{1}{4}$
3) Este número debe multiplicarse por $\frac{7}{2}$ para obtener el primer término de la sucesión que es $-\frac{7}{8}$. El término general buscado es:

$$\boldsymbol{f(n) = \frac{7}{2} * \left(-\frac{1}{4}\right)^n}$$

Los primeros términos de la sucesión son:

$$-\frac{7}{2^3},\frac{7}{2^5},-\frac{7}{2^7},\frac{7}{2^9},-\frac{7}{2^{11}},\dots,\frac{7}{2}*\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

Podemos darnos cuenta que el termino general de una sucesión geométrica se construye siempre de la misma manera.

El cociente entre un término y el anterior es una constante "r" que se eleva la potencia "n" y luego se multiplica por otra constante "a".

O sea que el término general de una sucesión geométrica siempre tiene la forma siguiente:

$$\boldsymbol{f(n) = a * r^n}$$

Donde "a" y "r" son números constantes. La constante "r" recibe el nombre de razón.

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS GEOMÉTRICOS.

Se trata ahora de colocar, entre dos números reales dados, un número específico de términos que junto con los dados originalmente, pertenezcan a una sucesión geométrica.

Ejemplo 1.
Intercalar entre 1 y 216 dos medios geométricos.

Solución:
Sabemos que el término general de una sucesión geométrica es de la forma

$$f(n) = a * r^n$$

Debemos encontrar por tanto los valores de las constantes "a" y "r"

Como entre 1 y 216 se van a intercalar dos términos, entonces se tendrán cuatro términos. El primero será 1 y el cuarto 216. Se tiene por lo tanto las dos igualdades siguientes:

Primer termino	$f(1) = a * r^1$	$a * r^1 = 1$
Cuarto Termino	$f(4) = a * r^4$	$a * r^4 = 216$

Al efectuar los cocientes termino a término, se tiene:

$$\frac{a * r^4}{a * r^1} = \frac{216}{1} \qquad \begin{gathered} r^3 = 216 \\ r = 6 \end{gathered}$$

Al sustituir este valor de "r" en la igualdad resulta:

$$\begin{aligned} a * r &= 1 \\ 6 * r &= 1 \\ r &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

El Término general es $f(n) = a * r^n$ por lo tanto

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{6} * 6^n \\ f(n) &= 6^n * 6^{-1} \\ f(n) &= 6^{n-1} \end{aligned}$$

Los cuatro términos son:

$$1, 6, 36, 216$$

Ejemplo 2.
Intercalar entre 12 y 708,588 cuatro medios geométricos.

Solución:
Habrá en total seis términos.

Primer Termino	$f(1) = a * r^1$	$a * r = 12$
Sexto Termino	$f(6) = a * r^6$	$a * r^6 = 708{,}588$

Al dividir termino a término:

$$\frac{a * r^6}{a * r} = \frac{708{,}588}{12}$$

$$r^5 = 59{,}049$$
$$r = 9$$

Al sustituir este valor de "r" resulta:

$$a * r = 12$$
$$9 * a = 12$$
$$a = \frac{12}{9} \Longrightarrow a = \frac{4}{3}$$

El término general es

$$f(n) = \frac{4}{3} * 9^n$$

$$f(n) = 4 * 3^{2n-1}$$

Los seis términos son: $12, 108, 972, 8{,}748, 78732, 708588$

Ejemplo 3.
Intercalar 3 medios geométricos entre 4 y 5

Solución:
Habrá en total cinco términos.

Primer Termino	$f(1) = a * r^1$	$a * r = 4$
Quinto Termino	$f(5) = a * r^5$	$a * r^5 = 5$

Al dividir termino a término:

$$\frac{a * r^5}{a * r} = \frac{5}{4}$$

$$r^4 = \frac{5}{4}$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{5}{4}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Al sustituir este valor de "r" resulta:

$$a * r = 4$$

$$\sqrt[4]{\frac{5}{4}} * a = 4$$

$$a = 4 \div \sqrt[4]{\frac{5}{4}} = 4 * \sqrt[4]{\frac{4}{5}} = 4 * \left(\frac{5}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

$$a = 4 * \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$$

El término general es

$$f(n) = 4 * \left(\frac{5}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} * \left[\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{n} \Rightarrow f(n) = 4 * \left(\frac{5}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} * \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{n}{4}}$$

$$f(n) = 4 * \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{n-1}{4}}$$

Los seis términos son: $4, 4\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{4}}, 4\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{4}}, 4\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{4}}, 5,$

ACTIVIDAD

I. Obtén para cada caso, el término general de la sucesión.

1) $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$
2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$
3) $1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \ldots$
4) $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
5) $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$
6) $125, 625, 3125, 15625, \ldots$
7) $\frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \frac{1}{3125} \ldots.$
8) $\frac{2}{3}, \frac{14}{3}, \frac{98}{3}, \frac{686}{3}, \frac{4802}{3}, \ldots$
9) $-\frac{1}{6}, -\frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, -\frac{1}{162}, \ldots$
10) $\frac{8}{5}, -\frac{32}{5}, \frac{128}{5}, -\frac{512}{5}, \ldots$
11) $5, \frac{5}{4}, -\frac{5}{16}, \frac{5}{64}, -\frac{5}{128}, , \ldots$
12) $-\frac{7}{6}, \frac{7}{18}, -\frac{7}{54}, \frac{7}{162}, , \ldots$

II. Intercalar 3 medios geométricos entre cada pareja de números.

13) $10\ y\ 15$
14) $8\ y\ 2{,}048$
15) $1\ y\ 3$
16) $4\ y\ 324$
17) $2\ y\ 4$
18) $6\ y\ 30$
19) $1\ y\ 6561$
20) $81\ y\ 531{,}441$
21) $7\ y\ 11$

22) El tercer término de una sucesión geométrica es 54 y el quinto término es 486. Encontrar el segundo término.
23) EL segundo término de una sucesión geométrica es $\frac{2}{3}$ y el cuarto término es $\frac{8}{3}$. Encontrar el tercer término.
24) El tercer término de una sucesión geométrica es $\frac{25}{7}$ y el sexto término es $-\frac{3125}{7}$. Encontrar el primero y el segundo término.

SUMA DE LOS N PRIMEROS TERMINOS DE UNA SUCESION GEOMETRICA.

Ejemplo 1.
Encontrar la suma $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots 2^{10}$

Solución:
Los términos pertenecen a una sucesión geométrica cuya razón es 2.

Al designar por S_n la suma de los primeros "n" términos de una sucesión geométrica. Entonces en nuestro ejemplo se tiene que:

$$S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$$

Se multiplican ambos lados de la igualdad por la razón precedida del signo menos y luego sumamos termino a término, resulta lo siguiente:

$$\begin{array}{rcccccccccccccccccccccc} S_{10} & = & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & 2^4 & + & 2^5 & + & 2^6 & + & 2^7 & + & 2^8 & + & 2^9 & + & 2^{10} & & \\ -2S_{10} & = & & - & 2^2 & - & 2^3 & - & 2^4 & - & 2^5 & - & 2^6 & - & 2^7 & - & 2^8 & - & 2^9 & - & 2^{10} & - & 2^{11} \\ \hline \end{array}$$

$S_{10} - 2S_{10} = 2 - 2^{11}$

$-2S_{10} = 2 - 2^{11}$

$S_{10} = 2^{11} - 2$

$S_{10} = 2{,}046$

La suma de los 10 primeros términos es 2,046

Ejemplo 2.
Calcular la suma $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$

<u>Solución:</u>
Los términos pertenecen a una sucesión geométrica cuya razón es $\frac{1}{3}$
Se tiene entonces:

$$\begin{array}{rccccccccccccc} S_6 & = & 1 & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{3^2} & + & \frac{1}{3^3} & + & \frac{1}{3^4} & + & \frac{1}{3^5} & & \\ -\frac{1}{3}S_6 & = & & - & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{3^2} & - & \frac{1}{3^3} & - & \frac{1}{3^4} & - & \frac{1}{3^5} & - & \frac{1}{3^6} \\ \hline \end{array}$$

$S_6 - \frac{1}{3}S_6 = 1 - \frac{1}{3^6}$

$\frac{2}{3}S_6 = 1 - \frac{1}{3^6}$

$S_6 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^6}\right)$

$S_6 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^6}\right)$

$S_6 = 1.4979424$

La suma de los primeros seis términos es 1.4979424

Ejemplo 3

Para $\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\cdots+\frac{3^n}{2^n}$

Encontrar la suma de los primeros 100 términos

<u>Solución:</u>

La razón es $\frac{3}{2}$. Resulta entonces lo siguiente:

$$\begin{array}{lcccccccccccccc} S_{100} & = & \frac{3}{2} & + & \frac{3^2}{2^2} & + & \frac{3^3}{2^3} & + & \frac{3^4}{2^4} & + & .... & + & \frac{3^{100}}{2^{100}} & & \\ -\frac{3}{2}S_{100} & = & & - & \frac{3^2}{2^2} & - & \frac{3^3}{2^3} & - & \frac{3^4}{2^4} & & .... & - & \frac{3^{100}}{2^{100}} & - & \frac{3^{101}}{2^{101}} \end{array}$$

$$S_{100}-\frac{3}{2}S_{100}=\frac{3}{2}-\frac{3^{101}}{2^{101}}$$

$$-\frac{1}{2}S_{100}=\frac{3}{2}-\frac{3^{101}}{2^{101}}$$

$$S_{100}=-2\left(\frac{3}{2}-\frac{3^{101}}{2^{101}}\right)$$

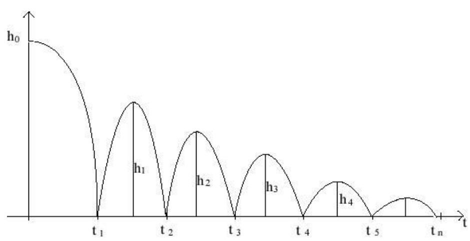
$$S_{100}=-3+\frac{3^{101}}{2^{100}}$$

La suma de los primeros 100 términos es $\frac{3^{101}}{2^{100}}-3$

Esta cantidad es demasiado grande y por eso lo dejamos únicamente indicada.

Ejemplo 4.

Se suelta una pelota desde una altura de 8 metros y empieza a rebotar, alcanzando en cada rebote $\frac{2}{3}$ de la altura del rebote anterior. La pelota se detiene en la ocasión en que toca por décima vez el suelo. Encontrar la distancia vertical total recorrida por la pelota.



En la primera ocasión que la pelota toca al suelo ha recorrido 8m. antes de tocar el suelo nuevamente debe subir y luego bajar. La distancia recorrida en esta ocasión es:

$$\underset{\text{Subida}}{8\left(\frac{2}{3}\right)} \qquad + \qquad \underset{\text{Bajada}}{8\left(\frac{2}{3}\right)} \qquad = \qquad 16\left(\frac{3}{3}\right)$$

Las distancias que recorre la pelota en cada uno de los diez contactos con el suelo son:

	Subida	Bajada	Total
1° contacto		8m	8m
2° contacto	$8\left(\frac{2}{3}\right)$	$8\left(\frac{2}{3}\right)$	$16\left(\frac{2}{3}\right)$
3° contacto	$8\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$	$8\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$	$16\left(\frac{2}{3}\right)^2$
4° contacto	$8\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$	$8\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$	$16\left(\frac{2}{3}\right)^3$
. . .			
9° contacto	$8\left(\frac{2}{3}\right)^8$	$8\left(\frac{2}{3}\right)^8$	$16\left(\frac{2}{3}\right)^8$
10° contacto	$8\left(\frac{2}{3}\right)^9$	$8\left(\frac{2}{3}\right)^9$	$16\left(\frac{2}{3}\right)^9$

La distancia total es la suma de cada una de las distancias anteriores.

$$8+16\left(\frac{2}{3}\right)^1+16\left(\frac{2}{3}\right)^2+16\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+16\left(\frac{2}{3}\right)^9$$

Al multiplicarse ambos miembros de la igualdad por $-\frac{2}{3}$ y sumar miembro a miembro resulta:

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
\boldsymbol{S_{10}} & = & 8 & + & 16\left(\frac{2}{3}\right)^1 & + & 16\left(\frac{2}{3}\right)^2 & + & 16\left(\frac{2}{3}\right)^3 & + & \cdots & + & 16\left(\frac{2}{3}\right)^9 & & \\
-\frac{2}{3}S_{10} & = & & - & 8\left(\frac{2}{3}\right) & - & 16\left(\frac{2}{3}\right)^2 & - & 16\left(\frac{2}{3}\right)^3 & - & \cdots & - & 16\left(\frac{2}{3}\right)^9 & - & 16\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \\
\hline
\end{array}$$

$$\boldsymbol{S_{10}}-\frac{2}{3}S_{10}=8+16\left(\frac{2}{3}\right)^1-8\left(\frac{2}{3}\right)-16\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

$$\frac{1}{3}S_{10}=8+16\left(\frac{2}{3}\right)^1-8\left(\frac{2}{3}\right)-16\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

$$S_{10}=39.168m$$

La distancia recorrida por la pelota es de 39.168m

Ejemplo 5.

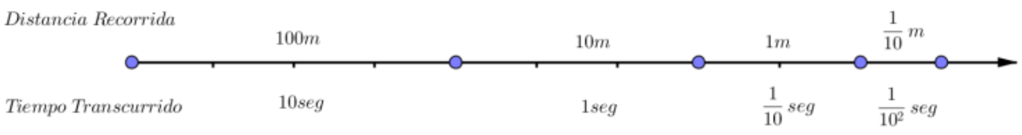
Al principio de esta unidad planteamos la paradoja de Aquiles y la tortuga. Estamos ahora en capacidad de dar solución a esta paradoja.

Supongamos que la velocidad de Aquiles es 10 metros por segundo y la de la tortuga 1m por segundo; porque dijimos que Aquiles era 10 veces más rápido.

Aquiles empieza a correr cuando la tortuga lleva 100 metros de ventaja y alcanza esa posición al cabo de 10 segundos, ; pero la tortuga avanza 10 metros más, por lo que Aquiles debe correr durante un segundo para conseguir este punto.

En este punto la tortuga esta un metro adelante, logrando Aquiles esta posición en 1/10 segundo; sin embrago la tortuga estará 1/10 metros adelante y así sucesivamente.

Para Aquiles se tiene lo siguiente:



El tiempo, en segundos, que Aquiles tarda en alcanzar a la tortuga es la suma

$$S_n = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n} \quad \text{“n” infinitamente grande}$$

Al multiplicar ambos miembros por $-\frac{1}{10}$ y luego sumar se tiene

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S_n & = & 10 & + & 1 & + & \frac{1}{10} & + & \frac{1}{10^2} & + & \dots & + & \frac{1}{10^n} & & \\ -\frac{1}{10}S_n & = & & - & 1 & - & \frac{1}{10} & - & \frac{1}{10^2} & - & \dots & - & \frac{1}{10^n} & - & \frac{1}{10^{n+1}} \\ \hline \end{array}$$

$$\boldsymbol{S_n} - \frac{1}{10}S_n = 10 - \frac{1}{10^{n+1}}$$

$$\frac{9}{10}S_n = 10 - \frac{1}{10^{n+1}}$$

$$9S_n = 10^2 - \frac{1}{10^n}$$

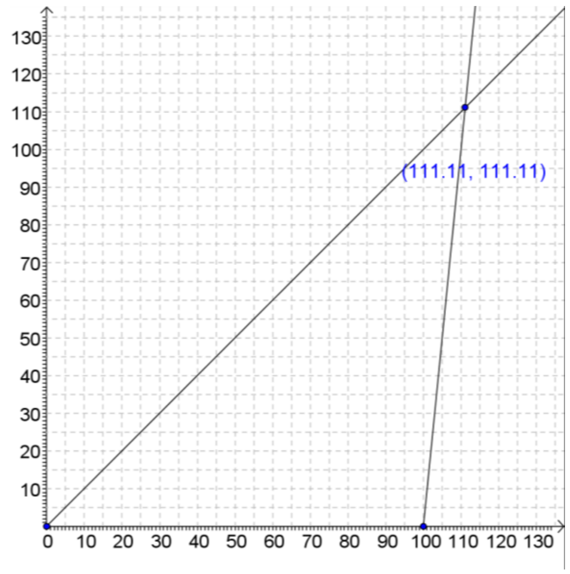
$$S_n = \frac{10^2 - \frac{1}{10^n}}{9}$$

Analicemos ahora este resultado.

Si “n” crece infinitamente, entonces $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ que tiene la forma de una funcion exponencial de base menor que 1, se hace tan pequeño y tan cercano a cero que podemos omitirlo.

Por lo tanto Aquiles alcanzara a la tortuga después de correr durante:

$$S_n = \frac{10^2}{9} = \frac{100}{9} = 11.11\ seg$$



El encuentro ocurrirá en donde se intersectan las rectas, es decir a 111.11 metros de distancia de la meta, después de 111.11 segundos de haber partido la tortuga.

Los griegos del tiempo de Zenón, quedaban absortos ante esta clase de problemas porque desconocían la firma de cómo obtener la suma de los términos de una sucesión geométrica, por lo tanto, no podían dar respuesta al planteamiento de Zenón.

ACTIVIDAD

Calcular las sumas indicadas.

1. $3+3^2+3^3+\cdots+3^9$
2. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}$
3. $5+25+125+\cdots+48{,}828{,}125$
4. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\cdots+\frac{256}{6561}$
5. $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}$
6. $3+\frac{9}{2}+\frac{27}{4}+\frac{81}{8}+\frac{243}{16}+\cdots+\frac{59049}{512}$
7. $1+10+100+\cdots+100{,}000{,}000$
8. $e+e^2+e^3+\cdots+e^{20}$

Encuentra la suma de los 10 primeros términos de la sucesión geométrica cuyo término general se da a continuación.

1. $f(n)=\left(\frac{4}{3}\right)^n$
2. $f(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$
3. $f(n)=2\left(-\frac{2}{3}\right)^n$
4. $f(n)=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$
5. $f(n)=4^{2-n}$
6. $f(n)=(0.9)^n$

Resuelva los siguientes problemas.

1. Una pelota se suelta desde una altura de 16m. La pelota alcanza en cada rebote $\frac{1}{2}$ de la altura del rebote anterior. Si se detiene en la ocasión en que hace contacto con el suelo por vigésima vez. Encontrar la distancia vertical total recorrida por la pelota.

2. Se deja caer una pelota desde una altura de 128m. La pelota alcanza en cada rebote $3/4$ de la altura del rebote anterior. Si se detiene en la ocasión en que hace contacto con el suelo por duodécima vez. Encontrar la distancia vertical recorrida por la pelota.

3. En el primer cuadrito de un tablero de ajedrez se coloca un grano de maíz, en cada uno de los siguientes cuadritos se coloca el doble de granos que en el cuadro anterior.

   De esta manera:
   En el 2° cuadrito se colocan 2 granos
   En el 3° cuadrito se colocan 4 granos
   En el 4° cuadrito se colocan 8 granos
   Y así sucesivamente hasta llegar al último cuadrito del tablero ¿Cuántos granos de maíz corresponderán el total a todo el tablero de ajedrez?

4. El número de ancestros directos de una persona está dada por

$$\underset{\text{padres}}{2} + \underset{\text{abuelos}}{2^2} + \underset{\text{bisabuelos}}{2^3} + \underset{\text{tatarabuelos}}{2^4} + \dots + 2^n + \dots$$

5. ¿Cuantos ancestros directos que hayan vivido desde el año 1500 habrá tenido una persona para el año 200, si el promedio de años entre dos generaciones es de 25 años?

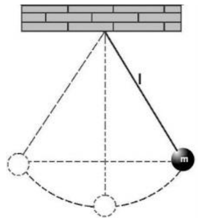
6. Una partícula es empujada por el viento de la manera siguiente: En el primer impulso la partícula recorre un metro, en el segundo impulso recorre medio metro, en el tercero un cuarto de metro y así sucesivamente en cada uno de los impulsos siguientes recorre la mitad de la distancia recorrida en el impulso anterior.
   a) ¿Cuál es la distancia total recorrida por la partícula después 100 impulsos?
   b) Si la partícula recibe 1000 impulsos o más ¿Podrá en algún momento recorrer más de 2 metros?

7. Un hombre dona \$10 a la ciudad donde nació, pero con la condición que este dinero se deposite en una cuenta bancaria que anualmente paga el 12% de interés compuesto, capitalizado mensualmente y que no se retire ningún centavo, sino hasta que haya transcurrido 150 años ¿De cuánto dinero dispondrá para entonces la ciudad?

8. El área de cada cuadrado inscrito es la mitad del área del cuadrado que lo contiene y hay 50 cuadrados dentro del mayor. Si todos los cuadrados han sido sombreados como se indica ¿Cuánto mide el total del área sombreada?

9. En la paradoja de Aquiles y la tortuga, Supón que Aquiles le da una ventaja de 120m y que además corre 8m por segundo. Mientras la tortuga lo hace a medio metro por segundo.
    a) ¿A qué distancia del punto de partida alcanzara Aquiles a la tortuga?
    b) ¿Cuántos segundos después de haber partido la tortuga la alcanzara Aquiles?

10. Si la trayectoria de la primera oscilación de un péndulo es de 56cm y a partir de la segunda oscilación la trayectoria de cada una es de 0.93 de la trayectoria de la oscilación anterior ¿Qué distancia recorre el disco del péndulo después de 25 oscilaciones?



11. Maritza viaja en su bicicleta. El radio de cada rueda mide 20cm, en una bajada Martita deja de pedalear. La rueda delantera gira 120 veces durante los primeros 8 segundos. Posteriormente en cada periodo de 8 segundos, la rueda gira $\frac{3}{4}$ partes de las veces que giro en el periodo pasado ¿Cuántos giros habrá dado la bicicleta al cabo de un minuto con 36 segundos y cuál será la distancia recorrida?