COLEGIO DE LA IGLESIA EVANGELICA EL DIOS DE ISRAEL GUION DE CLASE *Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.*	*Grado: 8º grado A y B* *Asignatura: Matemática* *Tiempo:______________* *Periodo: _______________*

UNIDAD 1. TRABAJEMOS CON NÚMEROS REALES ***Objetivo de unidad:*** *Que el alumno sea capaz de realizar operaciones con los números reales y la raíz cuadrada aplicando sus propiedades para solucionar problemas de la vida diaria, valorando el aporte de los demás.*		***Metodología:*** *La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.*
CONTENIDOS CONCEPTUALES	**CONTENIDOS PROCEDIMENTALES**	**CONTENIDOS ACTITUDINALES**
1. Raíz cuadrada	✓ *Resolución de problemas de aplicación de raíces cuadradas.*	✓ *Valora la utilidad de la raíz cuadrada.* ✓ *Seguridad, orden y precisión al obtener la raíz cuadrada.*
Objetivo: *que el alumno sea capaz de:* ✓ *Deducir y aplicar el teorema de Pitágoras a situaciones reales* ✓ *Mostrar seguridad y precisión en la deducción y aplicación del teorema de Pitágoras.*		***Material de Apoyo*** • *Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio.* • *Matemática 1º año de bachillerato Santillana (pioneros)*
Indicadores de logro. *1.0 Deduce y aplica con seguridad y precisión el Teorema de Pitágoras en la resolución de ejercicios y problemas de aplicación.*		***Evaluación:*** *Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.* ✓ *Orden y aseo 5%* ✓ *Puntualidad 5%* ✓ *Desarrollo correcto 90%*

Actividad	Tiempo
1. Bienvenida y asistencia	
2. Presentación del contenido y objetivo de la clase	
3. Exploración de Conocimientos Previos	
4. Introducción a la temática	
5. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
6. Delegación de actividades y cierre	
Tiempo Hora Clase	

Actividad Diagnostica:
Entra al siguiente link http://rolandotzun.wordpress.com/ Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

Contenido 1. Raíz Cuadrada.

Actividad de Introducción.

- ✓ *¿Cuáles son las dimensiones de una tabla cuadrada que tenga cuatro, nueve, dieciséis celdas cuadradas internas?*
- ✓ *¿Cuáles son las dimensiones de un cubo grande que tenga ocho, veintisiete, sesenta y cuatro cubitos internas?*

Raíces cuadradas y raíces cúbicas

Enrique decidió hacer un marco de madera para poner una fotografía con forma cuadrada de los Juegos Olímpicos de Atenas, cuya superficie es de 1 225 cm^2. Sin embargo, esta información no parece servir mucho para determinar la medida de los lados.
Por otro lado, su hermana Paula dispone de un pliego de papel de regalo, de 70 cm de ancho y 100 cm de largo, para envolver un joyero con forma de cubo, cuyo volumen es de 3 375 cm^3.

Analicemos...

- ¿Cuánto mide el lado de la fotografía que va a enmarcar Enrique?, ¿cómo lo calculaste?, ¿cuánta madera necesita?
- ¿Cuánto mide el lado del joyero que quiere envolver Paula?, ¿le alcanza con el pliego de papel que tiene?
- Dada la superficie de una región cuadrada, ¿existe una forma de obtener la medida del lado del cuadrado?, ¿cómo?
- Dado el volumen de un cuerpo cúbico, ¿se puede calcular la medida del lado?, ¿cómo?

Enrique debe calcular qué número al cuadrado es igual a 1 225. Este número se escribe con el símbolo $\sqrt{1\,225}$ y se lee como "raíz cuadrada de 1 225". En este caso, ya que $35 \cdot 35 = 1\,225$, el lado del cuadrado mide 35 cm. Y como $4 \cdot 35 = 140$, entonces, debe comprar al menos 140 cm de madera para cubrir el perímetro de la fotografía.
También podría considerarse al número –35 como raíz cuadrada de 1 225, ya que se cumple que $(-35) \cdot (-35) = 1\,225$, pero esto no corresponde.
Para evitar confusiones, al referirse a $\sqrt{1\,225}$ solo se considera el valor positivo, que en este caso es 35.
Además, la raíz cuadrada solo puede aplicarse a números reales positivos o al cero, ya que el cuadrado de todo número real es siempre positivo o cero.

Paula, en cambio, para determinar la medida del lado del cubo debe calcular qué número al cubo es igual a 3 375. En este caso, se escribe con el símbolo $\sqrt[3]{3\,375}$ y se lee como "raíz cúbica de 3 375", que en este caso es igual a 15, ya que $15^3 = 15 \cdot 15 \cdot 15 = 3\,375$. Entonces, si Paula dispone de un pliego de 7 000 cm^2, el papel de regalo le alcanza para cubrir el joyero, ya que su superficie total es de 1 350 cm^2.

Glosario

Términos de una raíz: *dada la expresión $\sqrt[n]{a}$, n es el índice de la raíz y a es la cantidad subradical.*

EN RESUMEN

- Recuerda que si a es un número positivo o 0 ($a \geq 0$), la expresión $\sqrt{a}$ denota al único número (mayor o igual a 0) cuyo cuadrado es a. $\sqrt{a}$: se lee "raíz cuadrada de a". Si $a \geq 0$:
  - $x = \sqrt{a}$ si $a = x^2$
  - $\sqrt{a}^2 = a$
- Si a es un número real cualquiera, la expresión $\sqrt[3]{a}$ corresponde al único número cuyo cubo es a, y su signo es el mismo que el de a, y se lee "raíz cúbica de a".
  - $x = \sqrt[3]{a}$ si $x^3 = a$
  - $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$
  - $\sqrt[3]{0} = 0$
- Los números negativos no tienen raíz cuadrada real, pero sí tienen raíz cúbica.

  Por ejemplo: $\sqrt[3]{-8} = -2$, ya que $(-2)^3 = -8$

Actividad Integradora 1

1. Resuelve:

a. Encuentra la medida del lado de un cuadrado de área igual a 121 m^2.

b. Determina el radio de un círculo cuya área es de 81π cm^2.

c. Si la medida del lado de un cuadrado se expresa por $\sqrt{A}$, donde A es el área del cuadrado, ¿cuál es la expresión del perímetro del cuadrado?, ¿y de la mitad del perímetro del cuadrado?

d. Encuentra el perímetro de una circunferencia que encierra un área de 361π m^2.

2. Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifica tu decisión.

a. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2+3}$

b. $\sqrt{32} = 8\sqrt{2}$

c. $\sqrt{32} = 4 + \sqrt{2}$

d. $\sqrt{28} = 2 + \sqrt{7}$

e. $\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

f. $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

3. Responde:

a. Determina el área de una cara de un cubo si su volumen es de 64 cm^3.

b. El volumen de un cubo es 125 m^3. Se quiere calcular el área de una de sus caras, por lo que se plantea que este cálculo es equivalente a resolver $\left(\sqrt[3]{125}\right)^2$. ¿Es correcta la afirmación anterior?, ¿por qué?

c. Si la medida de la arista de un cubo se expresa por $\sqrt[3]{V}$, ¿cómo se expresa el área de una de sus caras?, ¿cómo se expresa el volumen del cubo?

d. Calcula la medida de la arista de un cubo, cuyo volumen es de 24 m^3.

1. - Efectúa y halla la raíz cuadrada:

$$6^2 = 6 \times 6 \rightarrow \sqrt{36} = 6$$

$11^2 =$ .... $\longrightarrow$ $\sqrt{121} =$ .... $15^2 =$ .... $\longrightarrow$ $\sqrt{\quad} =$ ....

$40^2 =$ .... $\longrightarrow$ $\sqrt{\quad} =$ .... $12^2 =$ .... $\longrightarrow$ $\sqrt{\quad} =$ ....

$13^2 =$ .... $\longrightarrow$ $\sqrt{\quad} =$ .... $14^2 =$ .... $\longrightarrow$ $\sqrt{\quad} =$ ....

$16^2 =$ .... $\longrightarrow$ $\sqrt{\quad} =$ .... $24^2 =$ .... $\longrightarrow$ $\sqrt{\quad} =$ ....

$36^2 =$ .... $\longrightarrow$ $\sqrt{\quad} =$ .... $18^2 =$ .... $\longrightarrow$ $\sqrt{\quad} =$ ....

2. - Halla la raíz cuadrada de:

$\sqrt{81} =$ $\sqrt{16} =$ $\sqrt{49} =$ $\sqrt{4} =$

$\sqrt{25} =$ $\sqrt{9} =$ $\sqrt{36} =$ $\sqrt{64} =$

$\sqrt{100} =$ $\sqrt{121} =$ $\sqrt{169} =$ $\sqrt{225} =$

$\sqrt{484} =$ $\sqrt{196} =$ $\sqrt{144} =$ $\sqrt{361} =$

$\sqrt{289} =$ $\sqrt{400} =$ $\sqrt{256} =$ $\sqrt{324} =$

3. **Resuelva los siguientes problemas.**

Problemas1
Dos hermanos tienen dos cajas llenas de minerales. En total tienen 1753 minerales. Si las cajas son cuadradas y una de ellas tiene 27 minerales en cada lado, ¿cuántos minerales hay en cada lado de la otra caja?

Problema 2
Queremos cercar con una valla que cuesta 15,5 € el metro, un terreno cuadrado que mide 2.916 m2 de superficie. ¿Cuánto nos costará la valla?

Problema 3
Disponemos de 9 cajas de plantas con 484 plantas cada una para plantarlas en un terreno de forma cuadrada. ¿Cuántas plantas podremos colocar en cada lado?

Problema 4
Un albañil utilizó 4.900 baldosas cuadradas de 20 cm. de lado para cubrir una habitación cuadrada. ¿Cuántos m. mide el lado de la habitación?

4. Halle la potencia cubica de los números naturales del 1 al 20. Luego deduzca la raíz cubica de estos números ¿Qué obtienes?

	COLEGIO DE LA IGLESIA EVANGELICA EL DIOS DE ISRAEL GUION DE CLASE *Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.*	*Grado: 8º Grado A y B* *Asignatura: Matemática* *Tiempo:_______________* *Periodo: ________________*

UNIDAD 1. TRABAJEMOS CON NÚMEROS REALES ***Objetivo de unidad:*** *Que el alumno sea capaz de realizar operaciones con los números reales y la raíz cuadrada aplicando sus propiedades para solucionar problemas de la vida diaria, valorando el aporte de los demás.*	***Metodología:*** *La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.*

CONTENIDOS CONCEPTUALES	CONTENIDOS PROCEDIMENTALES	CONTENIDOS ACTITUDINALES
2. Números iracionales: ● *gráfica*	✓ *Representación gráfica de números irracionales en la recta numérica.* ✓ *Resolución de ejercicios y problemas aplicando números irracionales.*	✓ *Seguridad al graficar números irracionales en la recta numérica.* ✓ *Perseverancia en la realización de ejercicios y problemas.*

Objetivo: *que el alumno sea capaz de:* ✓ *Representar de forma gráfica los números irracionales en la recta numérica.* ✓ *Resolver ejercicios y problemas aplicando números irracionales.*	***Material de Apoyo*** • *Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio.* • *Matemática 1º año de bachillerato Santillana (pioneros)*
Indicadores de logro. ✓ *Representa de forma gráfica los números irracionales en la recta numérica.* ✓ *Resuelve ejercicios y problemas aplicando números irracionales.* ✓ *Muestra Seguridad al graficar números irracionales en la recta numérica.* ✓ *Muestra Perseverancia en la realización de ejercicios y problemas.*	***Evaluación:*** *Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.* ✓ *Orden y aseo 5%* ✓ *Puntualidad 5%* ✓ *Desarrollo correcto 90%*

Actividad	Tiempo
7. Bienvenida y asistencia	
8. Presentación del contenido y objetivo de la clase	
9. Exploración de Conocimientos Previos	
10. Introducción a la temática	
11. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
12. Delegación de actividades y cierre	
Tiempo Hora Clase	

Actividad Diagnostica:
Entra al siguiente link
http://rolandotzun.wordpress.com/
Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

Contenido 2. Números Irracionales.

Actividad de Introducción

- *¿Qué es un decimal periódico?*
- *¿Qué es un decimal semi periódico?*
- *¿puede un número decimal, un número natural y un número entero convertirse en fracción?*

Números irracionales

En cursos anteriores, aprendiste a reconocer los números racionales como aquellos que se pueden escribir como una fracción. Los números naturales y enteros son también números racionales. Los números decimales finitos también, ya que son equivalentes a una fracción decimal. En el caso de los decimales infinitos, solo si son periódicos o semiperiódicos corresponden a números racionales y, de hecho, existen procedimientos para escribir como fracción estos números.
Pero existen otros números decimales infinitos. Observa.

0,1436487965798085312346574568...
0,0011122222333334444455556789...
1,4142135623730950488016887242...
0,2463547680987540000876432456...
3,1415926535897932384626433832...

Analicemos...

- ¿Algún número de estos tiene período?, ¿crees que si se conocieran más cifras decimales se podría observar algún período?, ¿por qué?
- Con los procedimientos conocidos, ¿se podrían escribir como fracción? Justifica.
- ¿Estos números son racionales?, ¿por qué?
- ¿Reconoces algún número de estos?, ¿cuál o cuáles?

Existen números decimales infinitos que, aunque se conozcan 100, 1 000 ó 1 000 000 cifras decimales, no tienen período alguno. Luego, no se podrían escribir como fracción con alguno de los procedimientos conocidos.

Glosario

Número irracional: *número que no se puede obtener como cuociente de dos enteros.*
Número racional: *se puede expresar como cuociente de dos enteros.*

Un número decimal infinito que no es racional se llama **número irracional**. Es imposible escribirlos completamente, ya que tienen infinitas cifras decimales, por lo que usualmente se aproximan a la cantidad de cifras decimales necesarias, o bien se representan mediante operaciones, como $1 + \sqrt{3}$, o con constantes, como el caso del número π.

Algunos números irracionales destacados

El número irracional más conocido es el número π, que es la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, es decir:

$$\pi = \frac{\text{longitud de una circunferencia}}{\text{diámetro}}$$

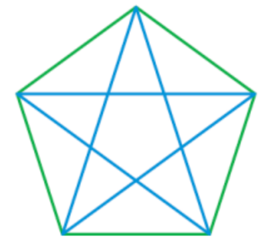
Muchas han sido las aproximaciones de π en el transcurso de los años, por ejemplo, en 1987 se calculó con una precisión de más de 100 millones de cifras decimales, sin encontrarse período alguno.

Otro importante número irracional es el número $e \approx 2{,}718281...$
El número e data del siglo XVI y aparece en forma natural cada vez que se estudian fenómenos de crecimiento o decrecimiento poblacional o se modelan las curvas, por ejemplo, que aparecen en los cables de tendido eléctrico.

El número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803398...$, llamado **número áureo**, fue descubierto en la Antigüedad al observar la proporción que hay en algunas figuras geométricas (relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular), también en algunas proporciones de la anatomía humana (por ejemplo, entre la altura de una persona y altura de su ombligo, o la relación entre el diámetro de la boca y diámetro de la nariz) y en la naturaleza (como en la disposición de los pétalos de las flores o en la distancia entre espiras de cualquier caracol).

Glosario

Número áureo:



$$\frac{\text{diagonal}}{\text{lado}} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi \approx 1{,}61803398...$$

En resumen

- Un **número irracional** es un número que no puede representarse como una fracción. Es un número decimal infinito que no tiene período.
- Algunos números irracionales destacados son π, el número e y el número de oro, ϕ.

Actividad Integradora 2

1. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales:

a. 0,737
b. 2,1732929...
c. 154,154154...
d. 23,242526...
e. 0,121231234...
f. 14,1010010001...
g. 26,0625
h. 12,4666...

2. Determina si m e y son números irracionales o no. Justifica tu decisión.

a. $m = \left(\frac{1+\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{6}}{2}\right)^2$

b. $y = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^3$

3. Encuentra un número irracional que cumpla lo siguiente:

a. Sea mayor que $\sqrt{2}$ y menor que $\sqrt{3}$.
b. Sea mayor que $\sqrt{15}$ y menor que 4.
c. Sea mayor que 1 y menor que $\sqrt{2}$.
d. Sea mayor que $\sqrt{23}$ y menor que $\sqrt{24}$.

4. Completa con los signos <, > o =, según corresponda.

a. $\sqrt{2}$ ◯ 1,4142
b. $\sqrt{2}$ ◯ 1,41
c. $\sqrt{3}$ ◯ 1,73
d. $\sqrt{3}$ ◯ 1,733
e. $\sqrt{5}$ ◯ 2,23
f. $\sqrt{5}$ ◯ 2,236

	COLEGIO DE LA IGLESIA EVANGELICA EL DIOS DE ISRAEL GUION DE CLASE *Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.*	*Grado: 8º Grado A y B* *Asignatura: Matemática* *Tiempo:______________* *Periodo: ______________*

UNIDAD 1. TRABAJEMOS CON NÚMEROS REALES ***Objetivo de unidad:*** *Que el alumno sea capaz de realizar operaciones con los números reales y la raíz cuadrada aplicando sus propiedades para solucionar problemas de la vida diaria, valorando el aporte de los demás.*	***Metodología:*** *La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.*

CONTENIDOS CONCEPTUALES	CONTENIDOS PROCEDIMENTALES	CONTENIDOS ACTITUDINALES
3. Números reales: *3.1 representación geométrica.*	✓ *Ubicación gráfica de los números reales en la recta numérica.*	✓ *Precisión al graficar números reales en la recta numérica.*
3.2 Operaciones: • *suma, resta, multiplicación y división* • *signos de agrupación.*	✓ *Resolución de problemas aplicando operaciones combinadas y signos de agrupación de números reales.*	✓ *Seguridad y orden al resolver operaciones combinadas de números reales.*

Objetivo: *que el alumno sea capaz de:* ✓ *Ubicar gráficamente los números reales en la recta numérica.* ✓ *Resolver problemas aplicando operaciones combinadas y signos de agrupación de números reales.*	***Material de Apoyo*** • *Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio.* • *Matemática 1º año de bachillerato Santillana (pioneros)*
Indicadores de logro. ✓ *Ubica de forma gráfica los números reales en la recta numérica.* ✓ *Muestra Precisión al graficar números reales en la recta numérica.* ✓ *Resuelve problemas aplicando operaciones combinadas y signos de agrupación de números reales.* ✓ *Muestra Seguridad y orden al resolver operaciones combinadas de números reales.*	***Evaluación:*** *Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.* ✓ *Orden y aseo 5%* ✓ *Puntualidad 5%* ✓ *Desarrollo correcto 90%*

Actividad	Tiempo
13. Bienvenida y asistencia	
14. Presentación del contenido y objetivo de la clase	
15. Exploración de Conocimientos Previos	
16. Introducción a la temática	
17. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
18. Delegación de actividades y cierre	
Tiempo Hora Clase	

Actividad Diagnostica:
Entra al siguiente link
http://rolandotzun.wordpress.com/
Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

Contenido 2. Números Irracionales.

Actividad de Introducción.

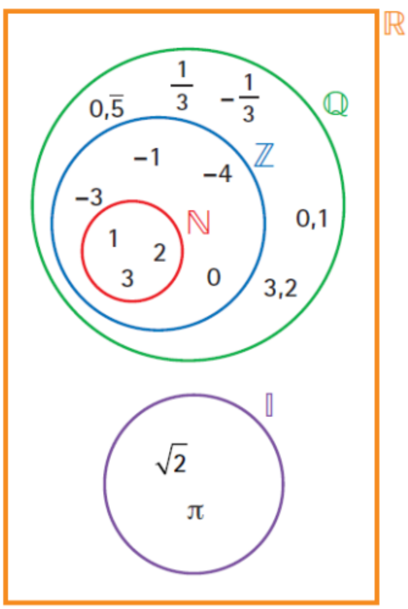
- *Construya el concepto de Números Naturales, Números Enteros Números Racionales y Números Irracionales.*
- *Argumente la forma y la necesidad que se tuvo para aceptar la existencia y formalización de estos campos.*
- *Justifique cada campo con un ejemplo y argumente la distinción entre cada uno de ellos.*

Números reales

Daniel necesita dibujar un diagrama que le permita comprender cómo se relacionan todos los conjuntos de números que conoce. Él sabe que todos los números naturales también son números enteros, que todos los enteros también son racionales y que los números irracionales, por definición, no son racionales.

Analicemos...

- ¿Existe un conjunto de números que los agrupe a todos o, al menos, una manera común de llamarlos a todos?
- ¿Qué propiedades tienen los números de este conjunto que no se cumplen en los otros?
- ¿Cómo se representarían en la recta numérica?



La unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales recibe el nombre de conjunto de los **números reales,** y se denota con el símbolo ℝ.

Las propiedades de las operaciones que involucran números racionales se extienden naturalmente a los números reales:

- Las operaciones básicas tienen como resultado números reales; es decir, de la adición, sustracción, multiplicación y división de números reales se obtiene siempre un número real. Es decir, el conjunto de los números reales es **cerrado**.
- La adición y la multiplicación de números reales satisfacen las propiedades de **conmutatividad** y **asociatividad**; cada operación tiene un **elemento neutro** y cada número real tiene su **elemento inverso**, tanto aditivo como multiplicativo (excepto el 0, que no tiene inverso multiplicativo).
- Además, la multiplicación es **distributiva** respecto de la adición.
- Es un conjunto **denso**, esto es, entre dos números reales siempre hay otro número real.

Los números racionales, cuando se escriben como números decimales, son finitos, infinitos periódicos o infinitos semiperiódicos. Sin embargo, los números irracionales son siempre números decimales infinitos pero no periódicos. Considerando su representación en la recta numérica, los números reales ocupan la recta numérica por completo, ya que los números irracionales completan todos los espacios dejados por los racionales en la recta numérica.

Glosario

Decimal finito: *número decimal cuya parte decimal es finita.*
Decimal infinito periódico: *número decimal cuya parte decimal está compuesta por una cifra o un conjunto de cifras que se repiten indefinidamente. El número que se repite se llama período.*

EN RESUMEN

- El conjunto de los **números reales** contiene a todos los números racionales e irracionales.
- Los números reales conservan las propiedades de las operaciones entre números racionales.

Actividad Integradora 3

1. Resuelve las siguientes operaciones y determina si sus resultados son iguales o no, en cada caso.

a. $\frac{4}{7}+\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{10}\right) \bigcirc \left(\frac{4}{7}+\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{10}$

b. $\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{9}\right) \bigcirc \left(\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{8}\right)\cdot\frac{7}{9}$

c. $\frac{18}{3}\cdot 0 \bigcirc 0\cdot\frac{18}{3}$

d. $7\cdot(4-9) \bigcirc (7\cdot 4)-(7\cdot 9)$

e. $\frac{4}{9}+\frac{5}{3} \bigcirc \frac{5}{3}+\frac{4}{9}$

f. $\frac{3}{7}+0 \bigcirc 0+\frac{3}{7}$

g. $(20{,}4+12{,}6)\cdot 3{,}5 \bigcirc (20{,}4\cdot 3{,}5)+(12{,}6\cdot 3{,}5)$

h. $\frac{2}{7}+\left(-\frac{2}{7}\right) \bigcirc \left(-\frac{2}{7}\right)+\frac{2}{7}$

i. $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{11} \bigcirc \frac{2}{11}\cdot\frac{3}{8}$

j. $\frac{4}{7}\cdot\left(\frac{7}{4}\right) \bigcirc \left(\frac{7}{4}\right)\cdot\frac{4}{7}$

- ¿Qué propiedad se está aplicando en cada caso?

2. Encuentra dos números reales que estén entre:

a. $\frac{7}{3}$ y $\frac{11}{13}$

b. $\frac{7}{13}$ y $\frac{8}{13}$

c. $\frac{99}{100}$ y $\frac{100}{99}$

d. $\frac{99}{101}$ y $\frac{101}{99}$

e. $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$

f. $\frac{1}{50}$ y $\frac{2}{101}$

3. Ordena de menor a mayor los siguientes números racionales:

a. $\frac{5}{6}, \frac{6}{5}, \frac{6}{7}$

b. $-\frac{7}{9}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{3}$

c. $\frac{5}{3}, \frac{7}{5}, 1$

d. $0{,}7501;\ 0{,}7051;\ \frac{3}{4}$

e. $0{,}\overline{3};\ 0{,}3\overline{4};\ 0{,}344;\ 0{,}\overline{34}$

f. $0{,}\overline{6};\ 0{,}5\overline{6};\ 0{,}\overline{56};\ 0{,}\overline{65}$

4. Decide si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a. $a < b \rightarrow \frac{a}{b} < 1 \quad a, b > 0$

b. $a < b \rightarrow \frac{a}{b} > 1 \quad a, b \neq 0$

Aproximación de un número irracional

Glosario

El número π es la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro:

$$\pi = \frac{\text{longitud de una circunferencia}}{\text{diámetro}}$$

$$\pi \approx 3{,}141592...$$

Tatiana quiere decorar un viejo tambor metálico para usarlo de paragüero en la sala de clases. Tiene un trozo de cuerda muy gruesa que va a pegar en el contorno del borde superior. El diámetro del tambor mide 58,5 cm. Ella decide cortar la cuerda de 175,5 cm de longitud para que le quede justa, pero le faltaron más de 7 cm.

Analicemos…

- ¿Cuál fue el error de Tatiana?
- ¿Cómo aproximarías π?, ¿por qué?
- ¿Qué entiendes por aproximar por defecto?, ¿y por exceso?
- ¿Cuál es la mejor aproximación de π con dos cifras decimales?, ¿qué error se comete con esta aproximación?
- ¿Cuál es la ventaja de aproximar por redondeo?

Recuerda que…

Aproximar *un número a ciertas cifras decimales consiste en encontrar un número con las cifras pedidas que esté muy próximo al número dado.*
Aproximar por redondeo *un número consiste en dar la mejor de las aproximaciones, es decir, aquella con la que se comete un error menor.*
Error de una aproximación *es la diferencia, en valor absoluto, entre un número y su aproximación.*

Tatiana calculó el perímetro del tambor usando 3 como aproximación de π, así: $P = 58{,}5 \cdot 3 = 175{,}5$. Después decidió aproximarlo a 3,2, para que no le quedara corta, $P = 58{,}5 \cdot 3{,}2 = 187{,}2$, pero, en este caso, le sobraron casi 4 cm. Entonces, decidió utilizar una calculadora y obtuvo $P = 58{,}5 \cdot \pi = 183{,}78317...$ y cortó nuevamente la cuerda, ahora de 183,8 cm, para cubrir completamente el contorno.

Al realizar una aproximación por **defecto**, se busca el número, con un determinado número de cifras decimales, que es inmediatamente menor que el dado. En cambio, para aproximar por **exceso**, se busca el número, con las cifras decimales fijadas, inmediatamente mayor.
Por ejemplo, dado el número π, al aproximarlo con dos cifras decimales:

- por defecto es 3,14.
- por exceso es 3,15.

Al utilizar la aproximación en lugar del número se comete un error, en el ejemplo anterior, los errores que se cometen son:

- por defecto: $3{,}141592... - 3{,}14 < 0{,}001592...$
- por exceso: $3{,}15 - 3{,}141592... < 0{,}008408...$

Entonces, al aproximar por **redondeo**, se escoge la aproximación con la que se comete el menor error, en este caso, $\pi \approx 3{,}14$.

No olvides que…

La cantidad de cifras decimales de una aproximación depende de la cantidad de cifras de los datos y también de la precisión requerida, según el contexto del problema.

Ahora, si no se conocen las cifras decimales de una raíz no exacta, por ejemplo $\sqrt{5}$, se puede aproximar por tanteo de la siguiente manera:
Sea D tal que $D^2 = 5$, entonces
$2 < D < 2{,}3$, ya que $2^2 = 4 < D^2 < 5{,}29 = 2{,}3^2$
$2{,}2 < D < 2{,}25$, ya que $2{,}2^2 = 4{,}84 < D^2 < 5{,}0625 = 2{,}25^2$
$2{,}23 < D < 2{,}24$, ya que $2{,}23^2 = 4{,}9729 < D^2 < 5{,}0176 = 2{,}24^2$.
Es decir, $D \approx 2{,}23$, aproximado con dos cifras decimales.

Actividad Integradora 4

1. Aproxima con dos cifras decimales por exceso y luego, por defecto, cada uno de los siguientes números irracionales. Considerando estos resultados, aproxima por redondeo.

a. 2,718281…
b. 3,141592…
c. 1,618033…
d. 1,732050…
e. 2,645751…
f. 3,605551…
g. 7,540182…
h. 4,376525…
i. 2,231748…

2. Indica, en cada caso, el error cometido al aproximar $\sqrt{22}$ a:

a. 4,69
b. 4,690416
c. 4,7
d. 4,6904
e. 5
f. 4,69042

3. Determina por tanteo aproximaciones con dos cifras decimales para

a. $\sqrt{15}$
b. $\sqrt{10}$
c. $\sqrt{12}$
d. $\sqrt{21}$
e. $\sqrt{17}$
f. $\sqrt{30}$

Mi progreso

1. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales:

a. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{6}$

c. $\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}\right)-\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}\right)$

d. $\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}\right)$

e. $\left(\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}-2}{4}\right)^2$

f. $\left(\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}-2}{4}\right)^2$

2. ¿Entre qué números enteros se ubican los números irracionales de la pregunta anterior?

3. Usando que $\sqrt{2}\approx 1,41;\ \sqrt{3}\approx 1,73;\ \sqrt{5}\approx 2,24;$ ordena de mayor a menor los siguientes números:

a. $\dfrac{\sqrt{4}}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

b. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{6},\ \dfrac{\sqrt{3}+1}{7},\ \dfrac{\sqrt{3}+2}{6}$

c. $\dfrac{2\sqrt{2}+1}{6},\ \dfrac{2\sqrt{2}-2}{6},\ \dfrac{2\sqrt{2}-1}{5}$

d. $\dfrac{\sqrt{5}}{10},\ \dfrac{\sqrt{5}+1}{10},\ \dfrac{\sqrt{5}}{11}$

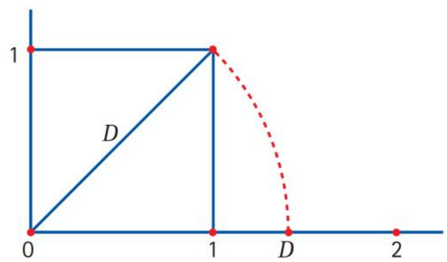
4. Ordena de menor a mayor los números: $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5}.$

5. Con ayuda de una calculadora, aproxima por exceso y por defecto con dos cifras decimales.

a. $\sqrt{3}+1$
b. $4-\sqrt{5}$
c. $\sqrt{7}-3$
d. $4-\sqrt{10}$
e. $\sqrt{11}-4$
f. $6-2\sqrt{10}$

Irracionalidad de algunas raíces cuadradas

Observa cómo se determina geométricamente la longitud de la diagonal de un cuadrado.



Analicemos...

- Según los datos de la figura, ¿cuánto mide la diagonal del cuadrado D?, ¿cómo lo supiste?
- ¿D es un decimal finito, o un decimal infinito (periódico o semiperiódico)?
- ¿Es D un número racional?, ¿se puede representar como fracción?

Glosario

Diagonal: *segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono.*
Demostración: *conjunto ordenado de argumentos que permiten obtener una verdad como consecuencia lógica de otra.*

Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene que $D^2 = 2$. Luego, $D = \sqrt{2}$.
¿Cuánto es $\sqrt{2}$?

Al utilizar una calculadora, arrojará algo como: $\sqrt{2} = 1{,}4142135$

Esto **no** significa que: $\sqrt{2} = \dfrac{14\ 142\ 135}{10\ 000\ 000}$

Al observar el resultado de la calculadora, se podría pensar que $\sqrt{2}$ es un decimal finito, pero con muchos decimales, o bien infinito, cuyo período sea más largo que la precisión de la calculadora, o bien infinito, pero que no tenga período.
¿Es $\sqrt{2}$ un número racional? Si así fuera, $\sqrt{2}$ se debe poder escribir como una fracción irreducible, con denominador distinto de 0.

Para demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional, se debe demostrar primero que:

Sea p un número natural. Si p^2 es un número par, entonces p es par.

Demostración por reducción al absurdo: supón que la propiedad **no es cierta**. Luego, debe haber un p impar cuyo cuadrado sea par. Para este número p existen números n y m naturales que cumplen:

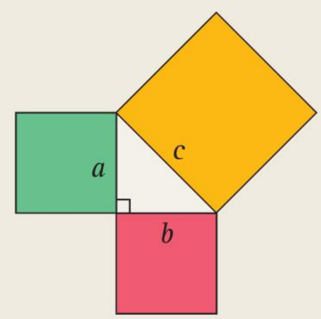
$p = 2n + 1$ (porque p es impar)
$p^2 = 2m$ (porque p^2 es par)

Pero si $p = 2n + 1$, entonces, calculando p^2 se obtiene:
$p^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$, y, necesariamente, p^2 es impar.
Por lo tanto, p^2 es un número par e impar. Lo cual es una contradicción. Entonces, la suposición era incorrecta y la propiedad queda demostrada.

Recuerda que...

Teorema de Pitágoras:
Si a y b son los catetos y c la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Glosario

Reducción al absurdo: *argumento de demostración, que consiste en suponer que la propiedad que se quiere demostrar* ***no es cierta*** *y deducir a partir de esto una contradicción. Entonces, como tal contradicción se debe a que la suposición era incorrecta, la propiedad debe ser cierta.*

Ahora, se puede demostrar que $\sqrt{2}$ **no es un número racional.**

Demostración por reducción al absurdo:

Supón que $\sqrt{2}$ es un número racional, en tal caso existen p y q, primos relativos, tales que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ con $q \neq 0$. De modo que $p = \sqrt{2}q$, y $p^2 = 2q^2$, por lo que p^2 es par.

GLOSARIO

Número primo: *número cuyos divisores son el 1 y él mismo.*

Pero si p^2 es par, por la demostración anterior, se sabe que p debe ser par.

Si p es par, existe un natural n tal que $p = 2n$.

Ahora, $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q} = \dfrac{2n}{q}$, y elevando al cuadrado $2 = \dfrac{(2n)^2}{q^2}$ de donde:

$2q^2 = 4n^2$. Simplificando se obtiene: $q^2 = 2n^2$.

Por tanto, q^2 es par y, como ya vimos, q es par.

En consecuencia, si $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, entonces p y q son ambos pares. Entonces, no es posible que exista una fracción irreducible. Pero todo número racional debe tener una fracción irreducible que lo represente. Esta es la contradicción. Luego, $\sqrt{2}$ **no es un número racional**. Por lo tanto, se dice que $\sqrt{2}$ es un número **irracional**.

GLOSARIO

Fracción irreducible: *es aquella cuyo numerador y denominador no poseen divisores comunes distintos de 1.*

La medida de la diagonal de un cuadrado, que hoy nos parece natural, generó una crisis en la escuela pitagórica, en el siglo VI a. C. en Grecia pues aparecieron cantidades "inexpresables"; es decir, que no se pueden representar como una fracción, algo que los egipcios y los babilonios ya dominaban. Este descubrimiento afectó el curso del pensamiento matemático griego y les hizo abandonar la idea de que la medición sea un gran puente entre la geometría y la aritmética de los números racionales. De hecho, el conjunto de números racionales es notoriamente inadecuado para propósitos geométricos simples, ya que en su gran mayoría aparecen números irracionales.

Actividad Integradora 5

1. De manera similar, demuestra que $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ no son números racionales. Recuerda demostrar primero la propiedad anterior correspondiente.

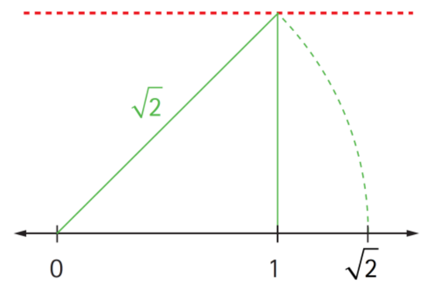
Ubicación de raíces en la recta numérica

Los números racionales son un conjunto que no completa la recta numérica; es decir, que por más números decimales que usemos, siempre existirán "huecos" entre ellos. Estos huecos corresponden a los números irracionales, como $\sqrt{2}$, que completan la recta numérica.

Analicemos...

- ¿Cómo pueden ubicarse en la recta numérica algunos números irracionales?
- ¿Es posible representar todos los números correspondientes a raíces cuadradas?

Para ubicar las raíces no exactas, por ejemplo $\sqrt{2}$, se puede aplicar el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 1 unidad: la hipotenusa de este triángulo será $\sqrt{2}$. Luego, al trazar … trada en el punto 0 de la recta numérica, en la … érica estará ubicado el número $\sqrt{2}$.

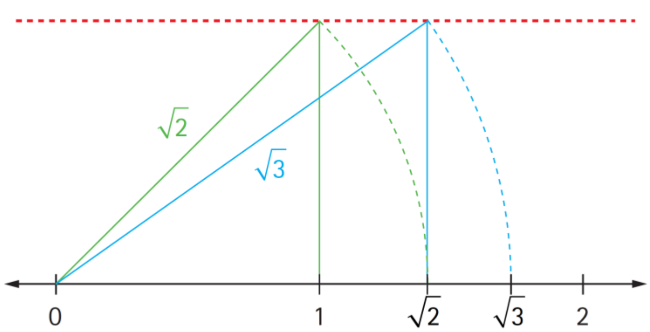


No olvides que...

La cantidad de cifras decimales de una aproximación depende de la cantidad de cifras de los datos y también de la precisión requerida, según el contexto del problema.

… nanera geométrica $\sqrt{n}$, siendo n cualquier … car el teorema de Pitágoras a un triángulo … aíz cuadrada del número natural anterior,

… de longitud $\sqrt{2}$ y un segmento de longitud 1, se construye un nuevo triángulo rectángulo. Se traza un arco de circunferencia centrada en el punto 0, y de radio igual a la hipotenusa de este nuevo triángulo. La intersección de este arco con la recta numérica es el punto $\sqrt{3}$.



En resumen

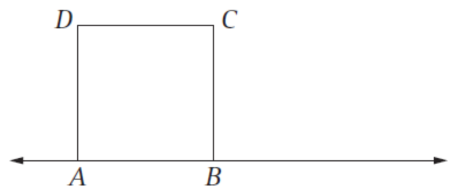
Algunos números irracionales pueden representarse en la recta numérica, como, por ejemplo, las raíces cuadradas de un número natural y expresiones compuestas que contienen raíces cuadradas.

Actividad Integradora 6

1. Ubica los números $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ en la recta numérica.

2. Completa la construcción gráfica del número áureo siguiendo las instrucciones:

- Copia en tu cuaderno la siguiente figura.



- Marca el punto medio del lado AB como el punto E.
- Con la ayuda de un compás, traza un arco de circunferencia con centro en E y radio EC.
- La intersección entre el arco de circunferencia y la recta AB determina el punto F.

Demuestra que la medida del segmento AF es igual a ϕ.

Cálculo de raíces enésimas y sus propiedades

Felipe está buscando una estrategia para calcular raíces usando las que ya conoce. Observa.

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[4]{625} = \sqrt{\sqrt{625}} = \sqrt{25} = 5$$

Analicemos...

- ¿Están correctos los cálculos de Felipe? Comprueba calculando la potencia correspondiente del resultado en cada caso.
- ¿Esta estrategia se puede usar siempre?, ¿sirve para calcular una raíz quinta, por ejemplo?
- Las propiedades de las operaciones de producto y cuociente de raíces cuadradas y cúbicas, ¿se extienden a las raíces enésimas?, ¿qué puedes concluir?

Para comprobar si los cálculos de Felipe están correctos, debemos calcular las potencias que corresponden. En ambos casos vemos que:

$$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$
$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$$

Y por lo tanto, ambos resultados son correctos.

Pese a lo anterior, los cálculos anteriores no justifican la estrategia usada por Felipe de separar las raíces de índice mayor, de modo que para comprobar usaremos algunas propiedades de las potencias.

Observando los resultados obtenidos, vemos que podemos escribirlos como:

$$2^6 = 2^{3 \cdot 2} = (2^3)^2 = 8^2 = 64$$
$$5^4 = 5^{2 \cdot 2} = (5^2)^2 = 25^2 = 625$$

Y por tanto, la propiedad de potencia de potencia justifica el uso de la separación de raíces de índice mayor.

Por otro lado, para calcular por ejemplo 6^5, podemos descomponerlo como $2^5 \cdot 3^5$, obteniendo $6^5 = 2^5 \cdot 3^5 = 32 \cdot 243 = 7\,776$. Asimismo, podemos calcular la raíz quinta de 7 776 a partir del producto anterior, obteniendo:

$$\sqrt[5]{7\,776} = \sqrt[5]{32 \cdot 243} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{243} = 2 \cdot 3 = 6$$

De modo que la propiedad de potencias de igual exponente permite obtener la raíz enésima de un producto como producto de raíces enésimas.

No olvides que...

Con la adición y la sustracción no se puede desarrollar:

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$$

En resumen

Si a y b son números reales, n y m números naturales, se cumplen las siguientes propiedades:

- **Adición y sustracción de raíces:** para que dos o más raíces se puedan sumar o restar, es necesario que sean semejantes; es decir, deben tener el mismo índice y la misma cantidad subradical.
- **Multiplicación de raíces de igual índice** $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ (si n es par, a, $b \geq 0$)
- **División de raíces de igual índice** $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, con $b \neq 0$.
- **Raíz de una raíz** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

Actividad Integradora 7

1. Resuelve.

a. $\sqrt[5]{7} + 5\sqrt[5]{7} - 2\sqrt[5]{7} + 1\ \sqrt[5]{7}$

b. $\sqrt[4]{12} + 6\sqrt[4]{12} - 4\sqrt[4]{12} + 3\sqrt[4]{12}$

c. $\sqrt[6]{9} - 3\sqrt[6]{9} - 4\sqrt[6]{18} + 15\sqrt[6]{18}$

d. $\sqrt[3]{25} + 2\sqrt[4]{25} + 5\sqrt[3]{25} - 7\sqrt[4]{25}$

2. Calcula las siguientes multiplicaciones de raíces de igual índice.

a. $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{7}$

b. $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$

c. $\sqrt[5]{64} : \sqrt[5]{2}$

d. $\sqrt[6]{256} : \sqrt[6]{4}$

3. Expresa las siguientes raíces o productos de raíces de la forma más simple posible.

a. $\sqrt{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{54}}$

b. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{1}{25}}$

c. $\sqrt{4\sqrt{9\sqrt[3]{729}}}$

d. $\sqrt[12]{4} \cdot \sqrt[6]{2}$

e. $\sqrt[7]{3\sqrt[3]{3^4}}$

f. $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{10} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{25}{4}} \cdot \sqrt[4]{5}$

4. Simplifica las siguientes expresiones, aplicando las propiedades de las raíces.

a. $1 - \dfrac{2}{\sqrt{8}} + \sqrt[3]{2} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{4}} + \dfrac{\sqrt{12}}{2}$

b. $\dfrac{\sqrt{63}}{2} - \dfrac{\sqrt{63}}{6} - \sqrt[10]{7} \cdot \sqrt[5]{49}$

c. $\left(\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{128}\right) - \left(\dfrac{\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{2}}{\sqrt{6}}\right)$

d. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \cdot \dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} =$

e. $\dfrac{\sqrt[4]{36}}{\sqrt[3]{7}} \cdot \dfrac{7}{3\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt[3]{49}}$

f. $5\sqrt{9\sqrt{12\sqrt{6}}} : 3\sqrt[4]{48}$