# UNIDAD 5

## UTILICEMOS LA PROBABILIDAD

| | | |
|---|---|---|
| | **COMPLEJO EDUCATIVO CANTON TUTULTEPEQUE**<br>**GUION DE CLASE**<br><br>*Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.* | *Grado: 2º año de bachillerato A y B*<br>*Asignatura: Matemática*<br>*Tiempo: ______________*<br>*Periodo: ____________* |

| | |
|---|---|
| ***UNIDAD 5. UTILICEMOS LA PROBABILIDAD.***<br>***Objetivo de unidad:*** *Tomar decisiones acertadas a partir de la determinación de la ocurrencia de un suceso y aplicar los métodos de distribución binomial o normal que conlleven variables discretas o continuas para estimar la probabilidad de eventos en diferentes ámbitos de la vida social, cultural y económica.* | ***Metodología:***<br>*La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.* |

| CONTENIDOS CONCEPTUALES | CONTENIDOS PROCEDIMENTALES | CONTENIDOS ACTITUDINALES |
|---|---|---|
| ***1. Variables aleatorias***<br>• *Variables aleatorias discretas y continuas* | ✓ *Reconocimiento y explicación de variables discretas y continuas en la realidad.* | ✓ *Seguridad al reconocer y explicar variables discretas y continuas.* |

| | |
|---|---|
| ***Objetivo:*** *que el alumno sea capaz de:*<br>✓ *Reconocer y explicar, con seguridad las variables discretas y continuas presentes en la realidad.*<br>✓ *Interpretar, demostrar y explicar con satisfacción y confianza las dos condiciones de la función de distribución de probabilidades.*<br>✓ *Determinar con seguridad e interés las probabilidades de ocurrencia de un dato aleatorio.* | ***Material de Apoyo***<br>• *Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio.*<br>• *Matemática 2º año de bachillerato Santillana (pioneros)* |
| ***Indicadores de logro.***<br>✓ *Reconoce y explica, con seguridad las variables discretas y continuas presentes en la realidad.*<br>✓ *Interpreta, demuestra y explica con satisfacción y confianza las dos condiciones de la función de distribución de probabilidades.*<br>✓ *Determina con seguridad e interés las probabilidades de ocurrencia de un dato aleatorio.* | ***Evaluación:***<br>*Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.*<br>✓ *Orden y aseo 5%*<br>✓ *Puntualidad 5%*<br>✓ *Desarrollo correcto 90%* |

| Actividad | Tiempo |
|---|---|
| 1. Bienvenida y asistencia | |
| 2. Presentación del contenido y objetivo de la clase | |
| 3. Exploración de Conocimientos Previos | |
| 4. Introducción a la temática | |
| 5. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos | |
| 6. Delegación de actividades y cierre | |
| Tiempo Hora Clase | |

**Actividad Diagnostica:**
Entra al siguiente link
http://rolandotzun.wordpress.com/
Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

## Contenido 1. Variables Aleatorias

### 1.1 Generalidades.

En probabilidad y estadística, una **variable aleatoria** o **variable estocástica** es una característica cuyos valores se obtienen de mediciones en algún tipo de experimento aleatorio. Formalmente, una variable aleatoria es una función, que asigna eventos a números reales.

Una variable aleatoria es una variable que toma valores numéricos determinados por el resultado de un experimento aleatorio.

Una variable aleatoria puede concebirse como un valor numérico que está afectado por el azar. Dada una variable aleatoria no es posible conocer con certeza el valor que tomará esta al ser medida o determinada, aunque sí se conoce que existe una distribución de probabilidad asociada al conjunto de valores posibles. Por ejemplo, en una epidemia de cólera, se sabe que una persona cualquiera puede enfermar o no (suceso), pero no se sabe cuál de los dos sucesos va a ocurrir. Solamente se puede decir que existe una probabilidad de que la persona enferme.

Otros ejemplos:

- ✓ nº de caras al lanzar 6 veces una moneda (valores: 0, 1, 2…)
- ✓ nº de llamadas que recibe un teléfono en una hora
- ✓ tiempo que esperan los clientes para pagar en un supermercado…

### 1.1 Clasificación de las Variables Aleatorias.

Para comprender de una manera más amplia y rigurosa los tipos de variables, es necesario conocer la definición de conjunto discreto. Un conjunto es discreto si está formado por un número finito de elementos, o si sus elementos se pueden enumerar en secuencia de modo que haya un primer elemento, un segundo elemento, un tercer elemento, y así sucesivamente.

Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas:

- Discretas: el conjunto de posibles valores es numerable. Suelen estar asociadas a experimentos en que se mide el número de veces que sucede algo.
- Continuas: el conjunto de posibles valores es no numerable. Puede tomar todos los valores de un intervalo. Son el resultado de medir.

Ejemplo: Clasificar como discretas o continuas las siguientes variables aleatorias:

a) nº de páginas de un libro → discreta
b) tiempo que tarda en fundirse una bombilla → continua
c) nº de preguntas en una clase de una hora → discreta
d) cantidad de agua consumida en un mes → continua

Para trabajar de manera sólida con variables aleatorias en general es necesario considerar un gran número de experimentos aleatorios, para su tratamiento estadístico, cuantificar los resultados de modo que se asigne un número real a cada uno de los resultados posibles del experimento. De este modo se establece una relación funcional entre elementos del espacio muestral asociado al experimento y números reales.

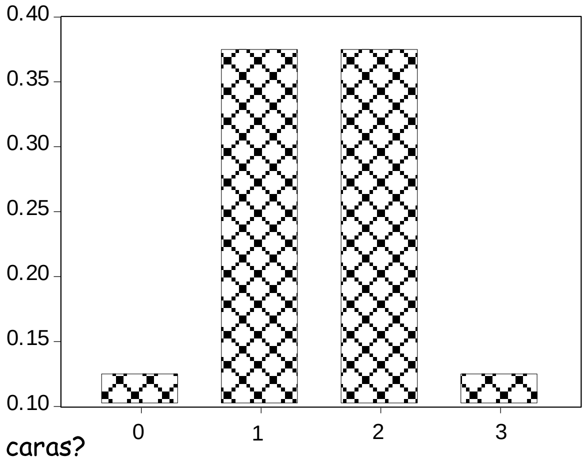
Definición formal: Una variable aleatoria (v.a.) X es una función real definida en el espacio muestral, Ω, asociado a un experimento aleatorio.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

## Ejemplo 1:

Variable aleatoria $x = nº\ de\ caras\ al\ lanzar\ tres\ veces\ una\ moneda$
Posibles valores de $x$: $0, 1, 2\ y\ 3$
Lanzar 3 veces moneda:
$E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX, XXX\}$
La variable aleatoria $x$:

- Toma valor 0 cuando ocurre el suceso {XXX}
- Toma valor 1 cuando ocurre el suceso {XXC,XCX,CXX}
- Toma valor 2 cuando {CCX,CXC,XCC}
- Toma valor 3 cuando {CCC}




La función de probabilidad de x es:

$$p_0 = P\{x=0\} = 1/8 = 0{,}125$$
$$p_1 = P\{x=1\} = 3/8 = 0{,}375$$
$$p_2 = P\{x=2\} = 3/8 = 0{,}375$$
$$p_3 = P\{x=3\} = 1/8 = 0{,}125$$

¿Cuál será la probabilidad de que salgan al menos dos caras?
$P\{x \le 2\} = P\{x=0\} + P\{x=1\} + P\{x=2\} = 0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375$
$= 0{,}875$

¿Cuál es la probabilidad de que el número de caras esté entre 1 y 2?
$P\{1 \le x \le 2\} = P\{x=1\} + P\{x=2\} = 0{,}375 + 0{,}375 = 0{,}75$

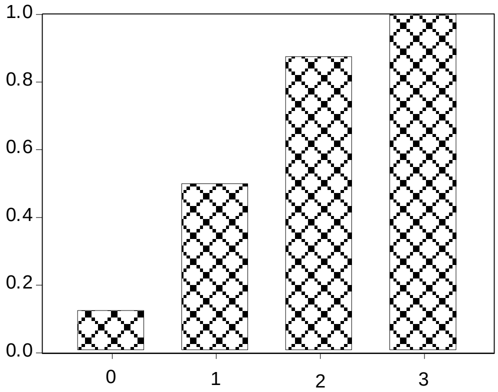
Sea $x$ una variable aleatoria discreta. Su distribución viene dada por los valores que puede tomar, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, y las probabilidades de que aparezcan $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$. Estas cantidades $p_i = P\{x = x_i\}$ reciben el nombre de función de probabilidad o función de masa.

## Ejemplo 2:

Sea x: nº caras al lanzar tres veces una moneda

$$P\{x \le 0\} = P\{x=0\} = 0{,}125$$
$$P\{x \le 1\} = P\{x=0\} + P\{x=1\} = 0{,}125 + 0{,}375 = 0{,}5$$
$$P\{x \le 2\} = P\{x=0\} + P\{x=1\} + P\{x=2\} = 0{,}5 + 0{,}375 = 0{,}875$$
$$P\{x \le 3\} = P\{x=0\} + P\{x=1\} + P\{x=2\} + P\{x=3\} = 0{,}875 + 0{,}125 = 1$$

Función de distribución de $x$



- La probabilidad de que una variable aleatoria *x* tome un valor entre dos cantidades *a* y *b* será:

$$P\{a \le x \le b\} = P\{x = a\} + P\{x = a+1\} + \ldots + P\{x = b-1\} + P\{x = b\}$$

$$= \sum_{x_i = a}^{b} P\{x = x_i\}$$

- La función de probabilidad verifica que:

  - $p_i = P\{x = x_i\} \ge 0$

  - $\sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{i=1}^{k} P\{x = x_i\} = 1$

- La función de distribución o de probabilidad acumulada representa en cada punto $x_0$ la probabilidad de que la variable tome un valor menor o igual que dicho punto, es decir $P\{x \le x_0\}$.

**Media o esperanza de una variable aleatoria**

La media de una variable aleatoria puede interpretarse como el valor esperado o medio que toma dicha variable o como el valor central de dicha distribución. La media o esperanza de una variable aleatoria discreta será:

$$E(x) = m_x = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

## Ejemplo 3:

Sea $x = resultado\ de\ lanzar\ un\ dado$

La distribución de probabilidad de *x* será:

$$p_1 = P\{x = 1\} = 1/6$$
$$p_2 = P\{x = 2\} = 1/6$$
………………
$$p_6 = P\{x = 6\} = 1/6$$

El valor esperado de *x* será:

$$m_x = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3{,}5$$

**Desviación típica de una variable aleatoria**

- La desviación típica de una variable aleatoria es una medida de dispersión de la distribución alrededor de la media. Los valores pequeños indican concentración de la distribución alrededor de la esperanza y los valores grandes corresponden a distribuciones más dispersas.
- Si x es una variable aleatoria discreta su desviación típica viene dada por:

$$\sigma_x = DT(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - m_x)^2 p_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 p_i - m_x^2}$$

## Ejemplo 4

Una compañía ha vendido 205 billetes para un avión de 200 plazas.
Sea $x$ la variable aleatoria que expresa el nº de viajeros que va al aeropuerto para viajar en el avión. Su distribución es:

| $x_i$ | 198 | 199 | 200 | 201 | 202 | 203 | 204 | 205 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,05 | 0,09 | 0,15 | 0,20 | 0,23 | 0,17 | 0,09 | 0,02 |

a) Hallar la probabilidad de que todos los viajeros que van al aeropuerto tengan plaza.

$$P\{x \le 200\} = P\{x = 198\} + P\{x = 199\} + P\{x = 200\} =$$

$$= 0{,}05 + 0{,}09 + 0{,}15 = 0{,}29$$

b) Obtener la probabilidad de que se quede sin plaza alguno de los viajeros que va al aeropuerto.

$$P\{x > 200\} = P\{x = 201\} + P\{x = 202\} + \ldots + P\{x = 205\} =$$

$$= 0{,}2 + 0{,}23 + 0{,}17 + 0{,}09 + 0{,}02 = 0{,}71$$

$$P\{x > 200\} = 1 - P\{x \le 200\} = 1 - 0{,}29 = 0{,}71$$

c) Calcular el nº esperado de viajeros que acude al aeropuerto.

$$m_x = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = 198 \times 0{,}05 + 199 \times 0{,}09 + 200 \times 0{,}15 + 201 \times 0{,}2 +$$

$$+ 202 \times 0{,}23 + 203 \times 0{,}17 + 204 \times 0{,}09 + 205 \times 0{,}02 =$$

$$= 201{,}44$$

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera persona de la lista de espera tenga sitio en el vuelo?

$$P\{x \le 199\} = P\{x = 198\} + P\{x = 199\} = 0{,}05 + 0{,}09 = 0{,}14$$

a) Hallar la desviación típica de x

**Ejemplo 5**

Sea $x$ una variable aleatoria que expresa el nº de personas que habitan en una vivienda elegida al azar. La distribución de probabilidad de $x$ es la siguiente:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 ó + |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,230 | 0,322 | 0,177 | 0,155 | 0,067 | 0,024 | 0,015 | 0,010 |

a) Comprobar que es una distribución de probabilidad.
Todas las $p_i$ son mayores o iguales que cero y además se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{8} p_i = 0{,}23 + 0{,}322 + 0{,}177 + \ldots + 0{,}010 = 1$$

b) Hallar la probabilidad de que el nº de personas que viven en un hogar sea menor o igual que cuatro.

$$P(x \leq 4) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) =$$
$$= 0{,}23 + 0{,}322 + 0{,}177 + 0{,}155 = 0{,}884$$

c) Calcular la probabilidad de que al menos dos personas vivan en una vivienda.

$$P(x \geq 2) = P(x=2) + P(x=3) + \ldots + P(x \geq 8) =$$
$$= 1 - P(x < 2) = 1 - 0{,}23 = 0{,}77$$

d) Obtener el nº medio de personas que habitan en una vivienda.

$$m_x = 1 \times 0{,}23 + 2 \times 0{,}322 + 3 \times 0{,}177 + \ldots + 7 \times 0{,}015 + 8 \times 0{,}01 = 2{,}689$$

b) Hallar la desviación típica de x

- Sea *x* una <u>variable aleatoria continua</u>. Si queremos conocer su distribución de probabilidad no nos vale la función de probabilidad empleada con las discretas (cada valor con su probabilidad asociada) porque toma muchos valores. La probabilidad asociada a cada valor es prácticamente nula (la <u>función de distribución es continua</u>).

- Emplearemos la <u>función de densidad</u>. Se interpreta de forma parecida al histograma. Expresa la "densidad" o concentración de probabilidad en cada zona. Expresa las probabilidades por áreas. Sus valores más altos corresponden a zonas en las que es más probable que aparezcan resultados del experimento aleatorio.

- La idea de media o esperanza de una variable aleatoria continua es equivalente pero su cálculo es algo más complicado porque requiere emplear el concepto de integral.

- El concepto de desviación típica es equivalente en variables aleatorias discretas y continuas, aunque en estas últimas su cálculo es más complicado.

**ACTIVIDAD DE INTEGRACION 1.**

Integre grupos de trabajo de 2 estudiantes como máximo (opcional). Discuta y desarrolle cada uno de los ejercicios y problemas que se presentan. Desarrollarlos en su cuaderno de clases de forma ordenada y estrictamente detallada y presentarlos individualmente en la fecha y tiempo estipulado por el profesor.
También:

- Desarrolle el problema propuesto en la página 80 del libro de texto.
- Desarrolle los problemas propuestos en la página 92 del libro de texto en la sección "Experimento Aleatorio".

**EJERCICIOS**

**1.** Una variable aleatoria discreta tiene la siguiente función de probabilidad:

| x | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| p | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

a) Hallar la función de distribución de dicha variable.
b) Representar la función de distribución.
c) Hallar la media y la desviación típica.

**2.** Considérese el experimento que consiste en lanzar dos dados y anotar el resultado de la suma de las caras superiores. Hallar
a) La función de probabilidad y su representación.
b) La función de distribución F(x) y su representación.
c) La media y la desviación típica.
d) Sea X la variable aleatoria que expresa la suma del número de puntos de los dos dados, hallar las siguientes probabilidades:

$p(X \leq 5)$ $\quad$ $p(X \geq 10)$ $\quad$ $F(4)$

**3.** Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de probabilidad es:

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,1 | 0,1 |

a) Calcular y representar gráficamente la función de distribución.
b) Calcular las siguientes probabilidades: $p(X<4,5)$ $\quad$ $p(X \geq 3)$ $\quad$ $p(3 \leq X \leq 4,5)$

| | | |
|---|---|---|
| | **COMPLEJO EDUCATIVO CANTON TUTULTEPEQUE**<br>**GUION DE CLASE**<br><br>*Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.* | *Grado: 2º año de bachillerato A*<br>*Asignatura: Matemática*<br>*Tiempo: ______________*<br>*Periodo: _______________* |

| | |
|---|---|
| ***UNIDAD 5. UTILICEMOS LA PROBABILIDAD.***<br>***Objetivo de unidad:*** *Tomar decisiones acertadas a partir de la determinación de la ocurrencia de un suceso y aplicar los métodos de distribución binomial o normal que conlleven variables discretas o continuas para estimar la probabilidad de eventos en diferentes ámbitos de la vida social, cultural y económica.* | ***Metodología:***<br>*La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.* |

| CONTENIDOS CONCEPTUALES | CONTENIDOS PROCEDIMENTALES | CONTENIDOS ACTITUDINALES |
|---|---|---|
| 2. *Distribución de la probabilidad:*<br>$P(x \leq X)$<br>$O \leq P(x) \leq 1$<br>$\sum_{I-1}^{n} P(x_1) = 1$ | ✓ *Interpretación, demostración y explicación de las dos condiciones de la función de distribución de probabilidades:*<br>✓ **a)** $0 \leq P(x) \leq 1$ **b)** $\sum_{I=1}^{n} P(x_1) = 1$<br>✓ *Determinación de las probabilidades de ocurrencia de un dato aleatorio.* | ✓ *Confianza y satisfacción al interpretar, demostrar y explicar las dos condiciones de la función de distribución de probabilidades.*<br>✓ *Interés y seguridad por determinar las probabilidades de ocurrencia de un dato aleatorio.* |
| *2.1 Distribución binomial*<br>• *Características*<br>• *Probabilidad de variables con distribución binomial.* | ✓ *Identificación y explicación de las características de la distribución binomial.*<br>✓ *Utilización de la fórmula para la distribución binomial en la solución de ejercicios y problemas.* | ✓ *Confianza y precisión al identificar y explicar las características de la distribución binomial.*<br>✓ *Precisión y seguridad en el uso de la fórmula para la distribución binomial en la solución de ejercicios y problemas.* |
| *2.2 Distribución normal*<br>• *Características.* | ✓ *Identificación, interpretación y explicación de las características de la distribución normal.* | ✓ *Seguridad al identificar, interpretar y explicar las características de la distribución normal.* |
| • *Distribución normal estándar:* | ✓ *Determinación de las propiedades de la distribución normal estándar.*<br>✓ *Utilización de tablas para encontrar áreas bajo la curva normal estándar.* | ✓ *Confianza y precisión al identificar y explicar las características de la distribución binomial.*<br>✓ *Precisión y seguridad en el uso de la fórmula para la distribución binomial en la solución de ejercicios.* |
| • *Probabilidad de variables con distribución normal* | ✓ *Determinación y explicación de la probabilidad de Resolución de ejercicios y problemas aplicados a la vida cotidiana sobre variables con distribución normal.* | ✓ *Seguridad al resolver ejercicios y problemas que involucren variables con distribución normal.* |

| | |
|---|---|
| ***Objetivo:*** *que el alumno sea capaz de:*<br>✓ *Reconocer y explicar, con seguridad las variables discretas y continuas presentes en la realidad.*<br>✓ *Interpretar, demostrar y explicar con satisfacción y confianza las dos condiciones de la función de distribución de probabilidades.*<br>✓ *Determinar con seguridad e interés las probabilidades de ocurrencia de un dato aleatorio.* | ***Material de Apoyo***<br>• *Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio.*<br>• *Matemática 2º año de bachillerato Santillana (pioneros)* |
| ***Indicadores de logro.***<br>✓ *Identifica y explica con precisión y confianza las características de la distribución binomial.*<br>✓ *Utiliza con precisión y seguridad la fórmula para el calcula de la probabilidad de una distribución binomial en la solución de ejercicios.*<br>✓ *Resuelve problemas con criticidad y confianza utilizando el cálculo de la probabilidad de variables con distribución binomial (trabajo en* | ***Evaluación:***<br>*Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.*<br>✓ *Orden y aseo 5%*<br>✓ *Puntualidad 5%*<br>✓ *Desarrollo correcto 90%* |

| | |
|---|---|
| *equipo).*<br>✓ *Identifica, interpreta y explica con seguridad las características de la distribución normal.*<br>✓ *Determina con precisión y confianza las propiedades de la distribución normal estándar.*<br>✓ *Utiliza con precisión y seguridad las tablas para encontrar áreas bajo la curva normal.*<br>✓ *Resuelve con seguridad ejercicios y problemas aplicados a la vida cotidiana sobre variables con distribución normal.* | |

| Actividad | Tiempo |
|---|---|
| 7. Bienvenida y asistencia | |
| 8. Presentación del contenido y objetivo de la clase | |
| 9. Exploración de Conocimientos Previos | |
| 10. Introducción a la temática | |
| 11. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos | |
| 12. Delegación de actividades y cierre | |
| Tiempo Hora Clase | |

***Actividad Diagnostica:***
*Entra al siguiente link*
*http://rolandotzun.wordpress.com/*
*Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.*

## Contenido 2. Distribuciones de Probabilidad.

**DEFINICIÓN**

Una distribución de probabilidad indica toda la gama de valores que pueden representarse como resultado de un experimento si éste se llevase a cabo.

Es decir, describe la probabilidad de que un evento se realice en el futuro, constituye una herramienta fundamental para la prospectiva, puesto que se puede diseñar un escenario de acontecimientos futuros considerando las tendencias actuales de diversos fenómenos naturales Toda distribución de probabilidad es generada por una variable (porque puede tomar diferentes valores) aleatoria x (porque el valor tomado es totalmente al azar) y puede ser de dos tipos:

**A. VARIABLE ALEATORIA DISCRETA (x).**

Porque solo puede tomar valores enteros y un número finito de ellos. Por ejemplo:
X Variable que nos define el número de alumnos aprobados en la materia de probabilidad en un grupo de 40 alumnos (1, 2 ,3… ó los 40).

PROPIEDADES DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA (X)

- ✓ $P(xi) < 1$ Las probabilidades asociadas a cada uno de los valores que toma x deben ser mayores o iguales a cero y menores o iguales a 1.
- ✓ $\sum p(xi) = 1$ La sumatoria de las probabilidades asociadas a cada uno de los valores que toma x debe ser igual a 1.

### Distribuciones de variable discreta más importantes

Las distribuciones de variable discreta más importantes son las siguientes:

- Distribución binomial o de Bernoulli
- Distribución Poisson

## 2.1 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL O DE BERNOULLI

La distribución Binomial es un caso particular de probabilidad de variable aleatoria discreta, y por sus aplicaciones, es posiblemente la más importante.

Esta distribución corresponde a la realización de un experimento aleatorio que cumple con las siguientes condiciones:

- Al realizar el experimento sólo son posible dos resultados: el suceso $A$, llamado éxito, y el suceso $\bar{A}$ , llamado fracaso.
- Al repetir el experimento, el resultado obtenido es independiente de los resultados obtenidos anteriormente.
- La probabilidad del suceso A es constante, es decir, no varía de una prueba del experimento a otra.
- En cada experimento se realizan n pruebas idénticas.

Todo experimento que tenga estas características se dice que sigue el modelo de la distribución Binomial o distribución de Bernoulli y su regla de correspondencia es:

$$P(X=x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

La distribución binomial se suele representar por B(n, p). Dónde:
$P(x) =$ es la probabilidad de ocurrencia del evento.
n: es el número de pruebas de que consta el experimento.
X: ocurrencia del evento o éxitos deseados
p: es la probabilidad de éxito, o la probabilidad que ocurra el suceso A
q: es la probabilidad de fracaso, o la probabilidad que no ocurra el suceso A (entonces sucede $\bar{A}$) y se obtiene mediante 1-p

**Ejemplo 1.**
Supongamos que se lanza un dado (con 6 caras) 50 veces y queremos conocer la probabilidad de que el número 3 salga 20 veces. En este caso tenemos una X ~ B(50, 1/6) y la probabilidad sería P(X=20):

$$P(X=20) = \binom{50}{20}(1/6)^{20}(1-1/6)^{50-20}$$

**Ejemplo 2.**
Se lanza una moneda cuatro veces. Calcular la probabilidad de que salgan más caras que cruces
B (4, 0.5) p = 0.5q = 0.5

$$p(X \geq 3) = p(X=3) + p(X=4) = \binom{4}{3}0.5^3 \cdot 0.5 + \binom{4}{4}0.5^4 = 0.3125$$

**Ejemplo 3.**
Un agente de seguros vende pólizas a cinco personas de la misma edad y que disfrutan de buena salud. Según las tablas actuales, la probabilidad de que una persona en estas condiciones viva 30 años o más es 2/3. Hállese la probabilidad de que, transcurridos 30 años, vivan:

1. Las cinco personas
   B(5, 2/3) p = 2/3 q = 1/3

$$p(X=5)=\binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5=0.132$$

2. Al menos tres personas

$$p(X\geq 3)=p(X=3)+p(X=4)+p(X=5)=$$

$$=\binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)+\binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5=0.791$$

3. Exactamente dos personas

$$p(X=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3=0.164$$

**Ejemplo 3.**
Si de seis a siete de la tarde se admite que un número de teléfono de cada cinco está comunicando, ¿cuál es la probabilidad de que, cuando se marquen 10 números de teléfono elegidos al azar, sólo comuniquen dos?

B(10, 1/5)  p = 1/5  q = 4/5

$$p(X=2)=\binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^8=0.3020$$

**Ejemplo 4.**
La probabilidad de que un hombre acierte en el blanco es 1/4. Si dispara 10 veces ¿cuál es la probabilidad de que acierte exactamente en tres ocasiones? ¿Cuál es la probabilidad de que acierte por lo menos en una ocasión?

B(10, 1/4)  p = 1/4  q = 3/4

$$p(X=3)=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^7=0.25$$

$$p(\text{al menos uno})=1-\binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}=0.9437$$

**Ejemplo 5.**
La última novela de un autor ha tenido un gran éxito, hasta el punto de que el 80% de los lectores ya la han leído. Un grupo de 4 amigos son aficionados a la lectura:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo hayan leído la novela 2 personas?
   B(4, 0.2)  p = 0.8  q = 0.2

$$p(X=2)=\binom{4}{2}0.8^2\cdot 0.2^2=\frac{4\cdot 3}{2}\cdot 0.64\cdot 0.04=0.1536$$

2. ¿Y cómo máximo 2?

$$p(X \leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) =$$

$$= \binom{4}{0} 0.8^0 \cdot 0.2^4 + \binom{4}{1} 0.8^1 \cdot 0.2^3 + \binom{4}{2} 0.8^2 \cdot 0.2^2 = 0.1808$$

**Ejemplo 6**

Un agente de seguros vende pólizas a cinco personas de la misma edad y que disfrutan de buena salud. Según las tablas actuales, la probabilidad de que una persona en estas condiciones viva 30 años o más es 2/3. Hállese la probabilidad de que, transcurridos 30 años, vivan:

1- Las cinco personas
B(5, 2/3)  p = 2/3  q = 1/3

$$p(X=5) = \binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0.132$$

2- Al menos tres personas

$$p(X \geq 3) = p(X=3) + p(X=4) + p(X=5) =$$
$$= \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right) + \binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0.791$$

3- Exactamente dos personas

$$p(X=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0.164$$

**Ejemplo 7.**

Se lanza una moneda cuatro veces. Calcular la probabilidad de que salgan más caras que cruces
B(4, 0.5)  p = 0.5  q = 0.5

$$p(X \geq 3) = p(X=3) + p(X=4) =$$

$$= \binom{4}{3} 0.5^3 \cdot 0.5 + \binom{4}{4} 0.5^4 = 0.3125$$

**Ejemplo 8.**

Si de seis a siete de la tarde se admite que un número de teléfono de cada cinco está comunicando, ¿cuál es la probabilidad de que, cuando se marquen 10 números de teléfono elegidos al azar, sólo comuniquen dos?

B(10, 1/5)  p = 1/5  q = 4/5

$$p(X=2) = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^8 = 0.3020$$

**Ejemplo 9**.

La probabilidad de que un hombre acierte en el blanco es 1/4. Si dispara 10 veces ¿cuál es la probabilidad de que acierte exactamente en tres ocasiones? ¿Cuál es la probabilidad de que acierte por lo menos en una ocasión?

B(10, 1/4)  p = 1/4  q = 3/4

$$p(X=3)=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^7=0.25$$

$$p(\text{al menos uno})=1-\binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}=0.9437$$

**Ejemplo 10.**

Un laboratorio afirma que una droga causa efectos secundarios en una proporción de 3 de cada 100 pacientes. Para contrastar esta afirmación, otro laboratorio elige al azar a 5 pacientes a los que aplica la droga. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?

1. Ningún paciente tenga efectos secundarios.
   B(100, 0.03)  p = 0.03  q = 0.97

$$p(X=0)=\binom{5}{0}0.97^5=0.8587$$

2. Al menos dos tengan efectos secundarios.

$$p(X\geq 2)=1-p(X<2)=1-\left[p(X=0)+p(X=1)\right]=$$

$$=1-\left[\binom{5}{0}0.97^5+\binom{5}{1}0.03\cdot 0.97^4\right]=0.00847$$

**ACTIVIDAD DE INTEGRACION 2.**

Integre grupos de trabajo de 2 estudiantes como máximo (opcional). Discuta y desarrolle cada uno de los ejercicios y problemas que se presentan. Desarrollarlos en su cuaderno de clases de forma ordenada y estrictamente detallada y presentarlos individualmente en la fecha y tiempo estipulado por el profesor.

1. Debido a las altas tasas de interés, una empresa reporta que el 30% de sus cuentas por cobrar están vencidas. Si el contador toma una muestra aleatoria de cinco cuentas, determine la probabilidad de los siguientes eventos:
   a) Ninguna de las cuentas están vencidas
   b) Por lo menos dos cuentas están vencidas
   c) La mayoría de las cuentas están vencidas

2. Un partido político consigue el 20% de los votos en unas elecciones. Se lleva a cabo una encuesta a quince personas. Obtener La probabilidad de que:
   a) Ninguno de los quince encuestados sean votantes de dicho partido.
   b) Al menos tres personas voten a favor de dicho partido.
   c) Calcular la media y desviación estándar del número d

## 2.2 DISTRIBUCIÓN DE POISSON

La distribución de POISSON es también un caso particular de probabilidad de variable aleatoria discreta, el cual debe su nombre a Siméon Denis Poisson (1781-1840), un francés que la desarrolló a partir de los estudios que realizó durante la última etapa de su vida.

Es útil cuando tratamos con cantidades de ocurrencia de un evento a lo largo de un intervalo de tiempo o espacio especificado.
Esta distribución se utiliza para describir ciertos procesos.

Características:
En este tipo de experimentos los éxitos buscados son expresados por unidad de área, tiempo, pieza, etc:
- # de defectos de una tela por m2
- # de aviones que aterrizan en un aeropuerto por día, hora, minuto, etc.
- # de bacterias por cm2 de cultivo
- # de llamadas telefónicas a un conmutador por hora, minuto, etc, etc.
- # de llegadas de embarcaciones a un puerto por día, mes, etc, etc.

Para determinar la probabilidad de que ocurran x éxitos por unidad de tiempo, área, o producto, la fórmula a utilizar sería:

$$P(X, \lambda) = \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{X!}$$

**Problema 1.**
Si un banco recibe en promedio 6 cheques sin fondo por día ¿Cuáles son las probabilidades de que reciba…?

a) Cuatro cheques sin fondo por día.
b) 10 cheques sin fondo en cualquiera de dos días consecutivos.

Solucion:

a) $x =$ variable que nos define el numero de cheques sin fondo que llegan al banco en un dia cualquiera = 0, 1, 2, 3,… etc.
   $\lambda = 6$ Cheques sin fondo por dia

$$f(4) = P(x = 4, \lambda = 6) = \frac{6^4 e^{-6}}{4!} = 0.13392$$

b) $x =$ variable que nos define el número de cheques sin fondo que llegan al banco en dos días consecutivos = 0, 1, 2, 3,… etc.
   $\lambda = 6 * 2 = 12$ Cheques sin fondo en promedio que llegan al banco en dos días consecutivos.

$$f(10) = P(x = 10, \lambda = 12) = \frac{12^{10} e^{-12}}{10!} = 0.104953$$

**Problema 2.**
Si una central telefónica recibe en promedio 4 llamadas por hora, calcular las siguientes probabilidades:

A. Que en una hora se reciba una llamada
B. Que en una hora se reciban tres llamadas
C. Que en una hora se reciba, al menos, una llamada
D. Que en una hora se reciban, como mucho, 4 llamadas

E. Si la frecuencia que recibe las llamadas es relativamente constante, es decir, se mantiene constante el promedio de llamadas recibidas por hora, calcular la probabilidad que en dos horas se reciban exactamente 9 llamadas.

Solución:
Sea $x =$ cantidad de llamadas recibidas por hora
Identificación de distribución Poisson:

- La variable aleatoria X posee un valor medio definido para un intervalo, en este caso, una hora.
- La media (el lamda) para los acápites es de 4 llamadas por hora

a) Que en una hora se reciban tres llamadas.

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = 4e^{-4} = 0{,}073263$$

b) Que en una hora se reciba una llamada.

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{4^3 e^{-4}}{3!} = 0{,}19367$$

c) Que en una hora se reciba, al menos, una llamada.

$$f(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{4^0 e^{-4}}{0!} = 1 - 0{,}018316 = 0{,}981684$$

d) Que en una hora se reciban, como mucho, 4 llamadas.

$$f(X < 5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$f(X < 5) = \left(\frac{4^0 e^{-4}}{0!}\right) + \left(\frac{4^1 e^{-4}}{1!}\right) + \left(\frac{4^2 e^{-4}}{2!}\right) + \left(\frac{4^3 e^{-4}}{3!}\right) + \left(\frac{4^4 e^{-4}}{4!}\right)$$

$$f(X < 5) = 0{,}018316 + 0{,}073263 + 0{,}146525 + 0{,}195367 + 0{,}195367$$

$$f(X < 5) = 0{,}628837$$

e) Se define la variable aleatoria.

Sea $x =$ cantidad de llamadas recibidas en un periodo de dos horas.
Entonces lamba, que debe estar expresado para el mismo intervalo que la variable aleatoria. Será ahora el siguiente:

$\lambda = 4$ Llamadas en promedio por hora * 2 horas
(Promedio de llamadas recibidas en el intervalo de dos horas)
$\lambda = 8$ Llamadas en dos horas.

Se pide:

$$f(9) = P(X = 9) = \frac{8^9 e^{-8}}{9!} = 0{,}124077$$

**Problema 3.**
En una inspección de hojalata producida por un proceso electrolítico continuo, se identifican 0.2 imperfecciones en promedio por minuto. Determine las probabilidades de identificar:

a) Una imperfección en 3 minutos.
b) Al menos dos imperfecciones en 5 minutos.
c) Cuando más una imperfección en 15 minutos.

Solución.

a) $x$ = variable que nos define el número de imperfecciones en la hojalata por cada 3 minutos = 0, 1, 2, 3, 4…. Etc.
$\lambda = 0.2 * 3 = 0.6$ Imperfecciones en promedio por cada 3 minutos en la hojalata.

$$f(1) = P(X = 1, \quad \lambda = 0.6) = \frac{(0.6)^1 e^{-0.6}}{1!} = 0.329307$$

b) $x$ = variable que nos define el número de imperfecciones en la hojalata por cada 5 minutos = 0, 1, 2, 3,… etc.
$\lambda = 0.2 * 5 = 1$ Imperfecciones en promedio por cada 5 minutos en la hojalata.

$$f(x = 2,3,4,..\lambda = 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$f(x = 2,3,4,..\lambda = 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$f(x = 2,3,4,..\lambda = 1) = 1 - \left[\frac{1^0 e^{-1}}{0!} + \frac{1^1 e^{-1}}{1!}\right]$$

$$f(x = 2,3,4,..\lambda = 1) = 1 - [0.367918 + 0.367918]$$

$$f(x = 2,3,4,..\lambda = 1) = 0.26416$$

c) $x$ = variable que nos define el número de imperfecciones en la hojalata por cada 15 minutos = 0, 1, 2, 3,… etc.
$\lambda = 0.2 * 15 = 3$ Imperfecciones en promedio por cada 15 minutos en la hojalata.

$$f(x = 0,1;\ \lambda = 3) = P(X = 0, \lambda = 3) + P(X = 1, \lambda = 3)$$

$$f(x = 0,1;\ \lambda = 3) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 e^{-3}}{1!}$$

$$f(x = 0,1;\ \lambda = 3) = 0.0498026 + 0.149408$$

$$f(x = 0,1;\ \lambda = 3) = 0.1992106$$

## Problema 4.
En una clínica el promedio de atención es 16 pacientes por 4 horas, encuentre la probabilidad que en 30 minutos se atiendan menos de 3 personas y que en 180 minutos se atiendan 12 pacientes.

La probabilidad que en 30 minutos se atiendan menos de 3 personas:

$$\lambda = 16 * \frac{\text{pacientes}}{\text{4 hora}} \qquad \lambda = 4 * \frac{\text{pacientes}}{\text{1 hora}} \qquad \lambda = 2 * \frac{\text{pacientes}}{\text{media hora}}$$

Debemos calcular:
$P(x < 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$

$$P(x < 3) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!}$$

$P(x < 3) = 0.1253 + 0.2707 + 0.2707$

$P(x < 3) = 0.6767$

En 180 minutos se atiendan 12 pacientes.

$$\lambda = 16 * \frac{\text{pacientes}}{\text{4 hora}} \qquad \lambda = 4 * \frac{\text{pacientes}}{\text{1 hora}} \qquad \lambda = 12 * \frac{\text{pacientes}}{\text{180 minutos}}$$

$$P(x = 12) = \frac{12^{12} e^{-12}}{12!}$$

$$P(x = 12) = 0.1144$$

## Problema 5.

En una tienda los clientes llegan al mostrador conforme una distribución de Poisson con un promedio de 10 por hora. En una hora dada ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen al menos 5 clientes?

Solucion:
Definamos a la variable aleatoria x "cantidad de clientes que llegan a la tienda"
Un promedio de 10 clientes por hora $\mu = 10 \frac{\text{clientes}}{\text{hora}}$
En un intervalo de una hora, es decir t=1 hora
Por lo tanto, $\mu = 10 \frac{\text{clientes}}{\text{hora}} * 1\text{hora} = 10 \text{ clientes, con esto tenemos:}$

$P(x \geq 5) = 1 - P(x \leq 4)$

$P(x \geq 5) = 1 - [P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4)]$

$$P(x \geq 5) = 1 - \left[\frac{10^0 e^{-10}}{0!} + \frac{10^1 e^{-10}}{1!} + \frac{10^2 e^{-10}}{2!} + \frac{10^3 e^{-10}}{3!} + \frac{10^4 e^{-10}}{4!}\right]$$

$P(x \geq 5) = 1 - [0.0293]$

$P(x \geq 5) = 0.970$

## Problema 6.

Con el objeto de revisar la calidad en el pulido de un lente cierta compañía acostumbra a determinar el número de manchas en la superficie considerando el lente defectuoso si 3 o más de tales manchas asperezas y otro tipo de defectos aparecen en él. Si la tasa media es de 2 defectos por $\text{cm}^2$ ¿calcule la probabilidad de que un lente de $4\text{cm}^2$, que ha sido revisado no se le catalogue como defectuoso? Un lente no se cataloga defectuoso si tiene menos de 3 defectos.

Solucion:
Definamos a la variable aleatoria x “cantidad de defectos que aparecen en el lente”
La tasa media es de 2 defectos por $\mathrm{cm}^2$, es decir:

$$\lambda = 2\frac{\mathrm{defetos}}{\mathrm{cm}^2}$$

Para el intervalo, tenemos que un lente de $4\mathrm{cm}^2$ sea revisado: $\mathrm{t} = \mathrm{cm}^2$ por lo tanto $\mathrm{E(x)} = \lambda\mathrm{t} = 8\ \mathrm{defectos}$. Para que el lente no se catalogue como defectuoso debe tener menos de tres defectos. Por lo tanto, la probabilidad que necesitemos calcular es que un lente de $4\mathrm{cm}^2$ tenga menos de tres defectps (es decir bueno).

$$\mathrm{P(x < 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)}$$

$$\mathrm{P(x < 3)} = \frac{8^0e^{-8}}{0!} + \frac{8^1e^{-8}}{1!} + \frac{8^2e^{-8}}{2!}$$

$$\mathrm{P(x < 3)} = 0.0138$$

## Problema 7.

Los reportes de crímenes recientes indican que 3.2 de los robos de vehículos motorizados ocurren cada minuto en estados unidos. Suponga que la distribución de los robos por minuto puede calcularse con la distribución de probabilidad de Poisson.

a) ¿calcule la probabilidad de que ocurran cuatro robos exactamente en un minuto?
b) ¿cuál es la probabilidad de que en un cuarto de hora cualquiera ocurran exactamente 45 robos?

a) Solución:

$$\lambda = 3.2\frac{\mathrm{robos}}{\mathrm{minuto}}$$

$$\mathrm{P(x = 4)} = \frac{(3.2)^4e^{3.2}}{4!}$$

$$\mathrm{P(x = 4)} = 0.1781$$

b) Solución:

$$\lambda = 3.2\frac{\mathrm{robos}}{\mathrm{minuto}} * 15 = 48\frac{\mathrm{robos}}{15\ \mathrm{minutos}}$$

$$\lambda = 48$$

$$\mathrm{P(x = 45)} = \frac{48^{45}e^{-48}}{45!}$$

$$\mathrm{P(x = 45)} = 0.0539$$

**ACTIVIDAD DE INTEGRACION 3.**

Integre grupos de trabajo de 2 estudiantes como máximo (opcional). Discuta y desarrolle cada uno de los ejercicios y problemas que se presentan. Desarrollarlos en su cuaderno de clases de forma ordenada y estrictamente detallada y presentarlos individualmente en la fecha y tiempo estipulado por el profesor.

1. Una compañía de exploración gana un contrato con Petróleos de Venezuela para perforar pozos, esta compañía tiene estadísticas que le indican que en el 10% de los pozos de prueba que perfora encuentra un depósito de gas natural. Si perfora 6 pozos, hallar la probabilidad de que:
   a) Por lo menos en 2 se encuentre gas natural.
   b) El número de pozos donde se encuentre gas natural sea mayor a 1 y menor que 4.

2. El número de fallas de un instrumento de prueba debido a partículas contaminantes de un producto es una variable Poisson con media (λ) igual a 0.02 fallas por hora.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el instrumento falle una vez en una jornada de doce horas?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de veces que falle el instrumento en una jornada de 36 horas sea mayor o igual a cuatro y menor que siete?

**B. VARIABLE ALEATORIA CONTINUA (x).**

Porque puede tomar tanto valores enteros como fraccionarios y un número infinito de ellos dentro de un mismo intervalo. Por ejemplo: x es la Variable que nos define la concentración en gramos de plata de algunas muestras de mineral (14.8 gr, 12.1, 10.0, 42.3, 15.0, 18.4, 19.0, 21.0, 20.8, …, n)

PROPIEDADES DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA (X)

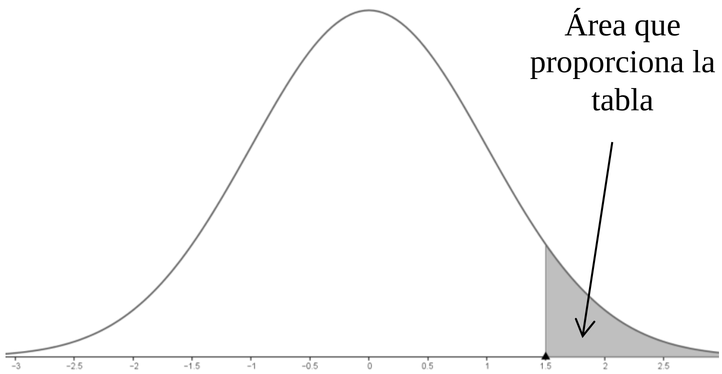
p(x) Las probabilidades asociadas a cada uno de los valores que toma x deben ser mayores o iguales a cero. Dicho de otra forma, la función de densidad de probabilidad deberá tomar solo valores mayores o iguales a cero.

El área definida bajo la función de densidad de probabilidad deberá ser de 1.
Las distribuciones de variable continua más importantes son las siguientes:
- Distribución normal

## Uso de la tabla Normal Tipificada.

La tabla de la curva normal tipificada nos proporciona el área o lo que es lo mismo, la probabilidad a la derecha de un valor cualquiera de Z.

En la tabla aparecen distintos valores de Z con un entero y dos decimales.



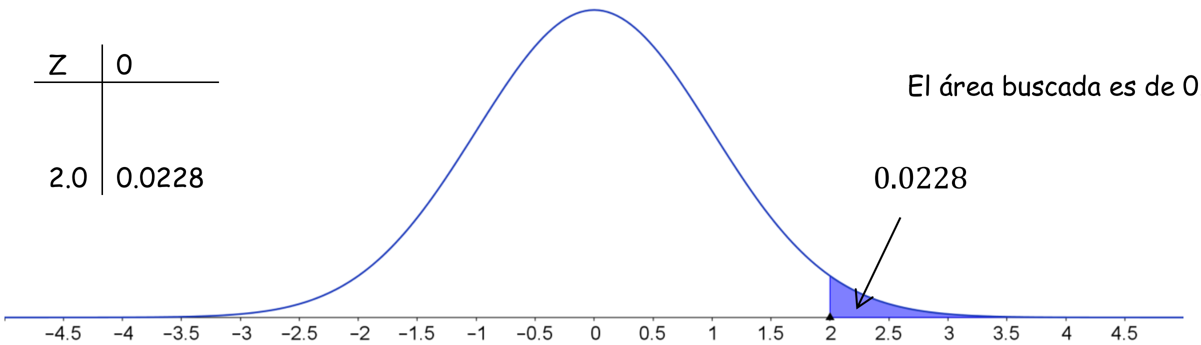

La primera columna de la izquierda da para Z un valor entero y un decimal; mientras que la fila superior proporciona el segundo decimal correspondiente a las centésimas. En la parte central de la tabla aparecen distintas áreas. Veamos el uso de dicha tabla.

**Ejemplo 1.**
Determinar el área a la derecha de $Z = 2$

Solución:
Como 2=2.00 se busca en la primer columna el valor 2.0 y en la fila superior el valor 0. Vemos que el área correspondiente a estos dos valores es:

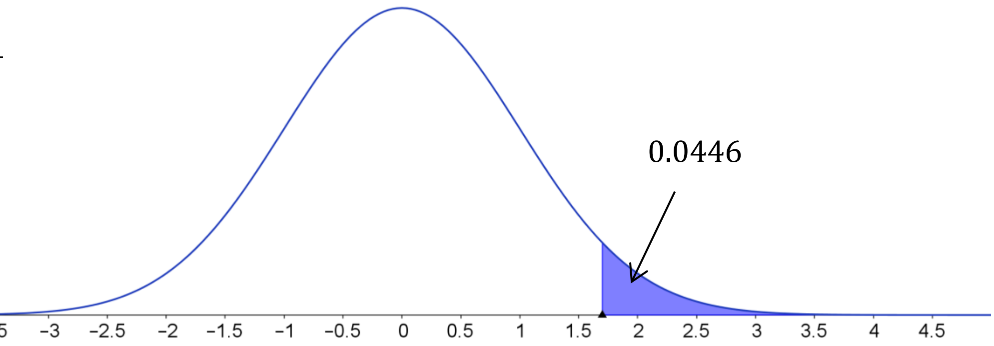
| Z | 0 |
|---|---|
| 2.0 | 0.0228 |

El área buscada es de 0.0228

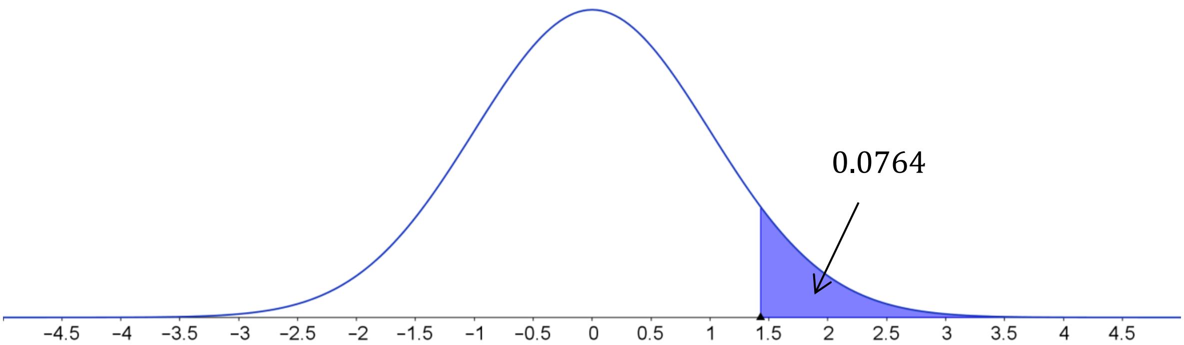


**Ejemplo 2.**
Calcular la probabilidad de que la variable Z sea mayor que 1.7
Solución: lo que buscamos es $P(Z > 1.7)$
Como 1.7=1.70, se busca en la primer columna el valor 1.7 y en la fila superior el valor 0.
Por lo tanto $P(Z > 1.7) = 0.0446$

| Z | 0 |
|---|---|
| 1.7 | 0.0446 |




**Ejemplo 3.**
Calcular la probabilidad de que la variable Z sea mayor que 1.43
Solución: Ahora lo que buscamos en la primera columna el valor 1.4 y en la fila superior el valor 3.
Por lo tanto tenemos que $P(Z > 1.43) = 0{,}0764$




Para calcular el área a la izquierda de un valor negativo de Z, debemos tener en cuenta que como el grafico es simétrico respecto al eje vertical que pasa por cero, es obvio que el área a la izquierda de cero es igual que el área a la derecha de cero.

Ahora bien, aunque el valor de la variable Z puede ser negativo o positivo; debemos tener en cuenta que el valor del área correspondiente siempre es positivo; puesto que un área o una probabilidad nunca puede ser negativa.

Veamos algunos ejemplos en donde la variable Z toma valores negativos.

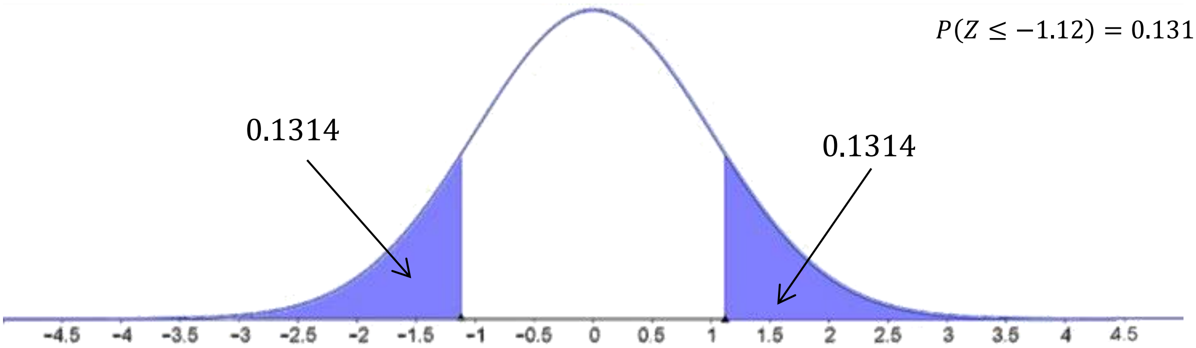
Ejemplo 4. Encuentre:

a) $P(Z \leq -1.12)$
b) $P(Z \leq 2.09)$
c) $P(Z \leq -2.18)$

Solución:

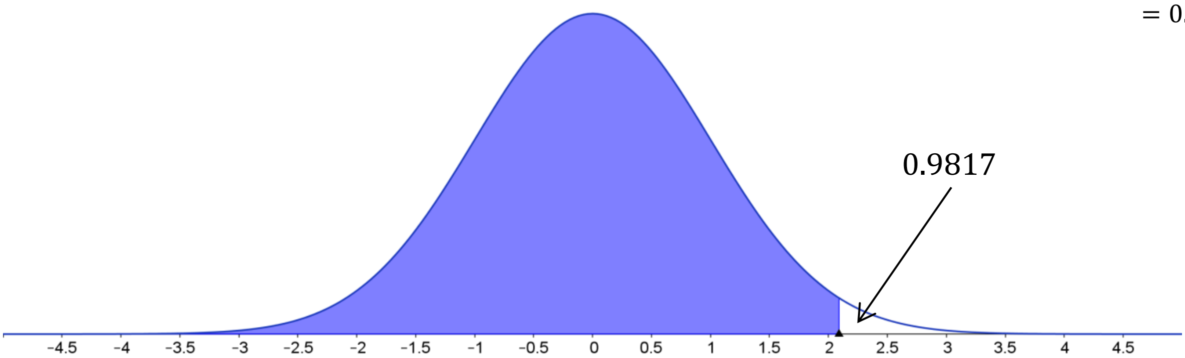
a) Como el área a la izquierda de $Z = -1.12$ es la misma que el área a la derecha de Z=1.12, se tiene lo siguiente:

$P(Z \leq -1.12) = 0.1314$

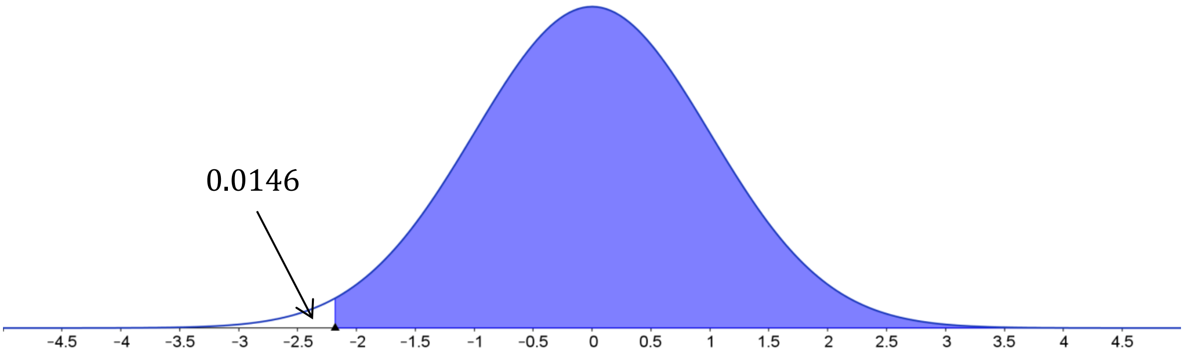



b) La tabla nos da el valor del área a la derecha de $Z = 2.09$ pero como el área total es 1, se tiene lo siguiente:

$$P(Z < 2.09) = 1 - 0.00183 \\ = 0.9817$$




c) $P(Z > -2.18) = 1 - 0.0146 = 0.9854$



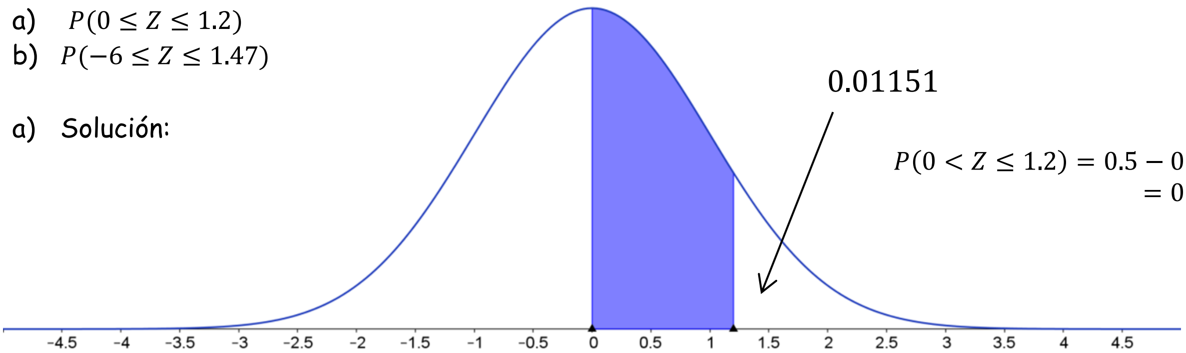

Ejemplo 5. Calcular:

a) $P(0 \leq Z \leq 1.2)$

b) $P(-6 \leq Z \leq 1.47)$

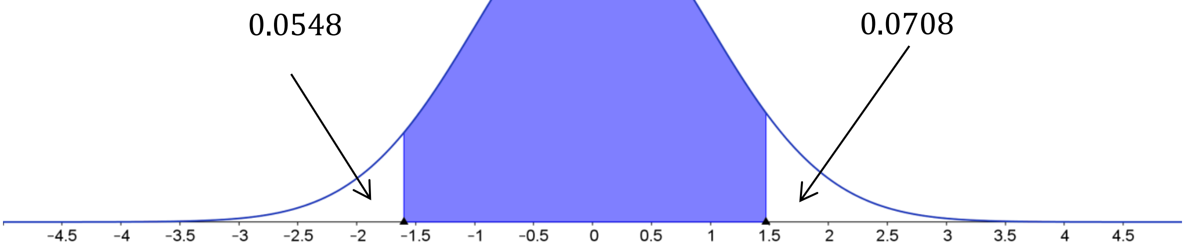
a) Solución:

$$P(0 < Z \leq 1.2) = 0.5 - 0.1151 \\ = 0.3849$$



b) La tabla nos proporciona las áreas de los dos extremos y como el área total es uno. El área que buscamos es uno, menos las dos áreas de los extremos.

$P(-1.6 \leq Z \leq 1.47)$
$= 1 - 0.548 - 0.0708$
$= 0.8744$



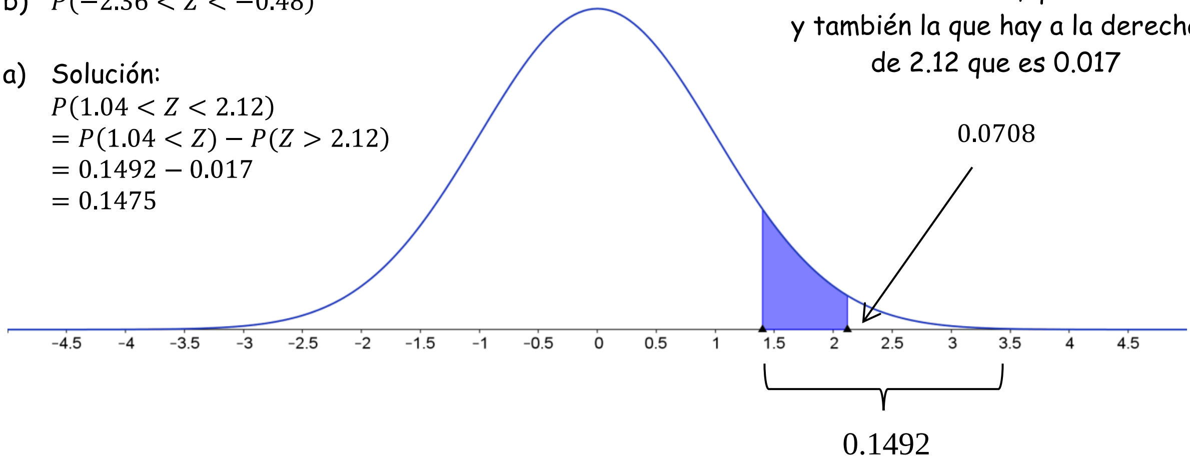

Aclaración: Cuando se buscan áreas bajo la curva normal, estas no se modifican por el hecho de utilizar el símbolo $\leq$ o llamar la llamada desigualdad estricta, que es <, en ambos casos las áreas son las mismas, así por ejemplo: $P(-1.6 \leq Z \leq 1.47) = P(-1.6 < Z < 1.47)$

**Ejemplo 6:** Calcular

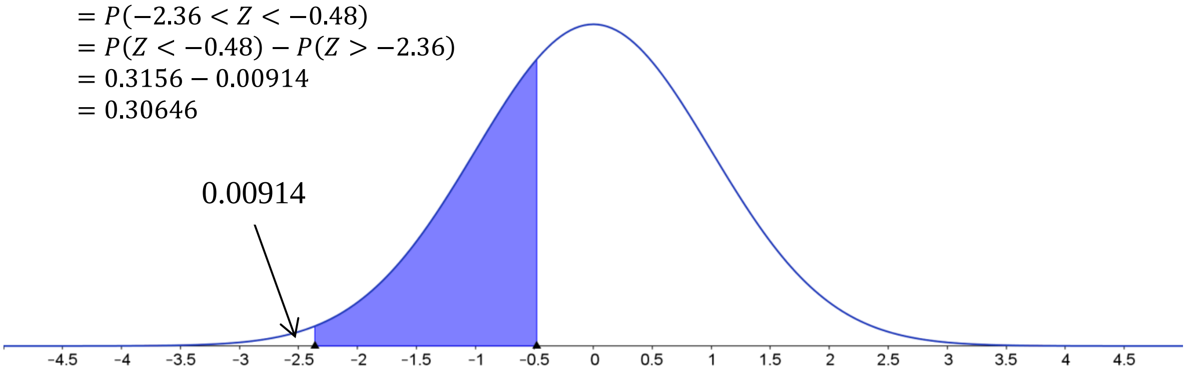
a) $P(1.04 < Z < 2.12)$
b) $P(-2.36 < Z < -0.48)$

a) Solución:
$P(1.04 < Z < 2.12)$
$= P(1.04 < Z) - P(Z > 2.12)$
$= 0.1492 - 0.017$
$= 0.1475$

La tabla nos da el área que hay a la derecha de 1.04, que es 0.1492 y también la que hay a la derecha de 2.12 que es 0.017




b) Solución:
$= P(-2.36 < Z < -0.48)$
$= P(Z < -0.48) - P(Z > -2.36)$
$= 0.3156 - 0.00914$
$= 0.30646$



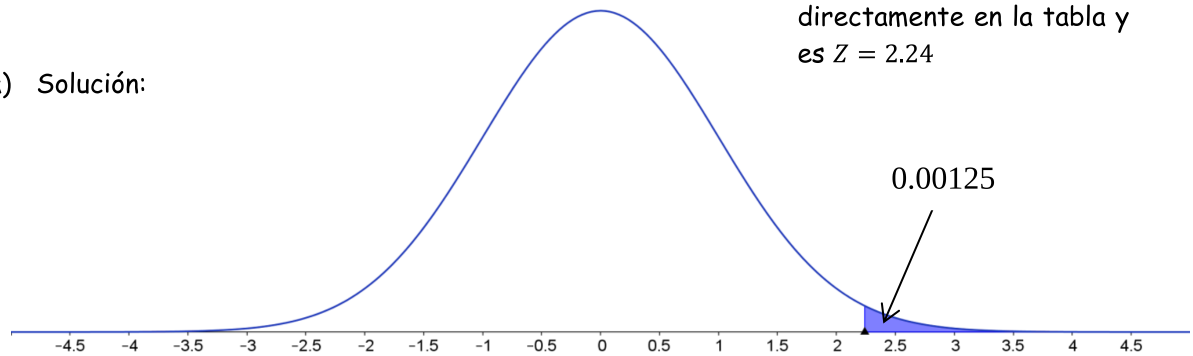

Ahora veremos un ejemplo diferente a los anteriores. En el se da una probabilidad o lo que es lo mismo un área y se busca el valor de la variable tipificada Z que corresponde a dicha probabilidad.

**Ejemplo 7**. Si Z es una variable normal tipificada. Encontrar ek valor de Z si se sabe que:

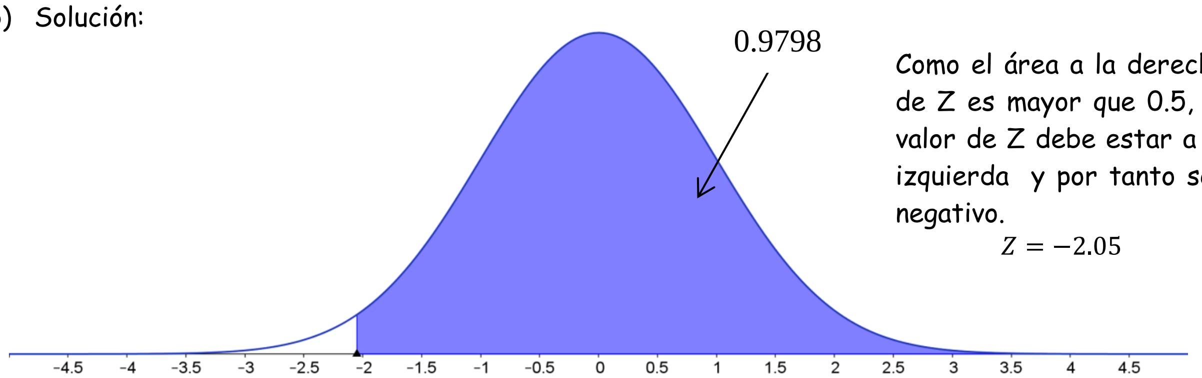
a) El área a la derecha de Z es: 0.0125
b) El área a la derecha de Z es 0.9798
c) El área a la izquierda de Z es de 0.9686
d) El área entre cero y Z es 0.4608
e) El área entre -1.64 y Z es 0.8049

a) Solución:

El valor de Z se encuentra directamente en la tabla y es $Z = 2.24$



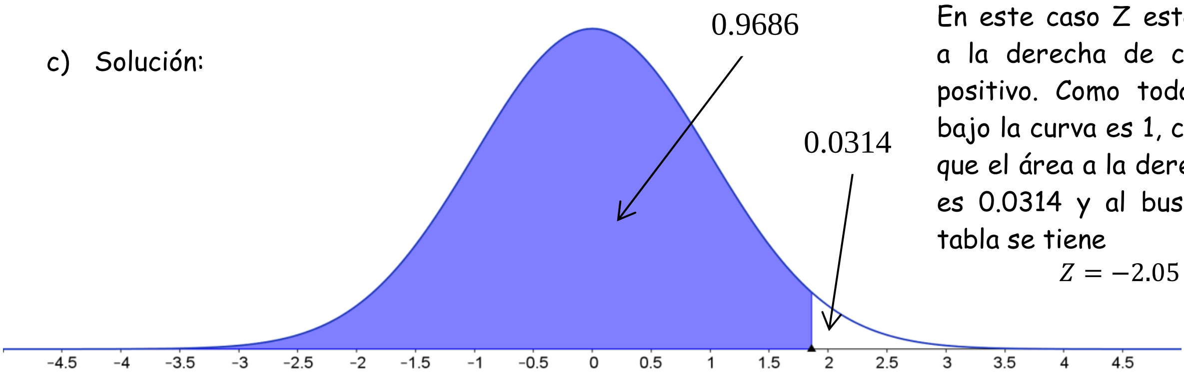

b) Solución:




Como el área a la derecha de Z es mayor que 0.5, el valor de Z debe estar a la izquierda y por tanto ser negativo.

$$Z = -2.05$$

c) Solución:

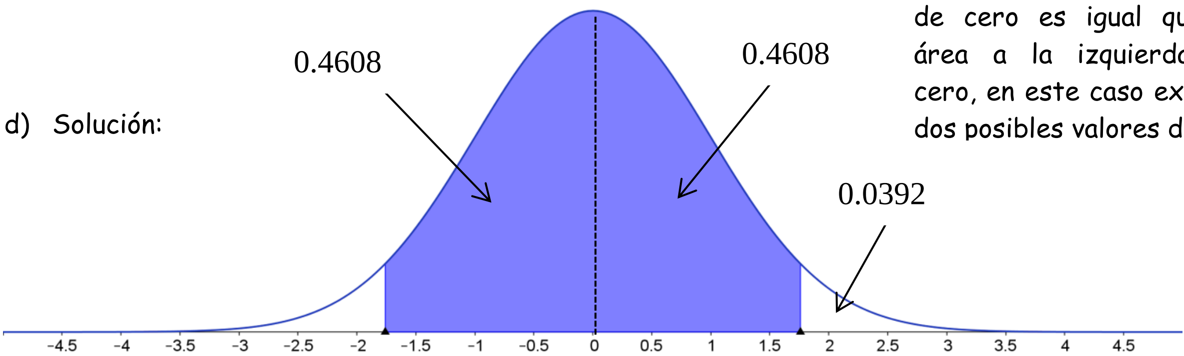



En este caso Z está ubicado a la derecha de cero y es positivo. Como toda el área bajo la curva es 1, concluimos que el área a la derecha de Z es 0.0314 y al buscar en la tabla se tiene

$$Z = -2.05$$

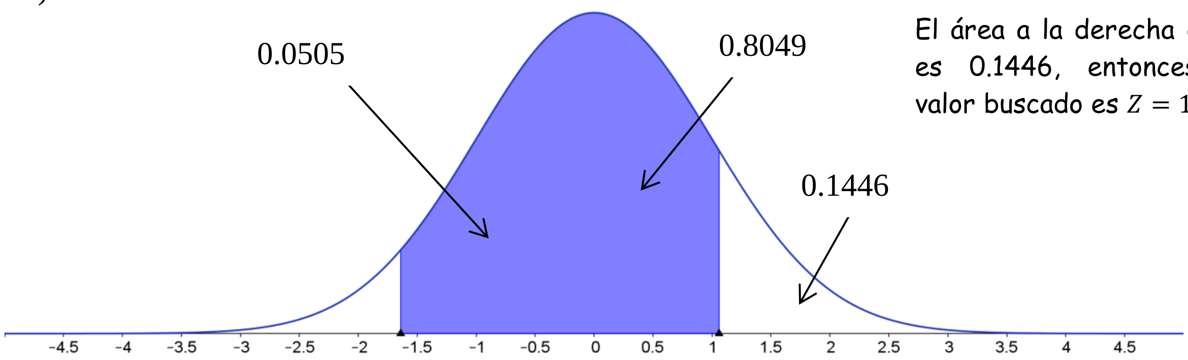
Como el área a la derecha de cero es igual que el área a la izquierda de cero, en este caso existen dos posibles valores de Z

d) Solución:



El área a la derecha de cero es 0.5 por lo tanto el área al lado derecho del valor positivo de Z es 0.0392. Los valores de Z son: $Z = 1.76\ o\ Z = -1.76$

e) Solución:




El área a la derecha de Z es 0.1446, entonces el valor buscado es $Z = 1.06$

**ACTIVIDAD DE INTEGRACION 4.**

Integre grupos de trabajo de 2 estudiantes como máximo (opcional). Discuta y desarrolle cada uno de los ejercicios y problemas que se presentan. Desarrollarlos en su cuaderno de clases de forma ordenada y estrictamente detallada y presentarlos individualmente en la fecha y tiempo estipulado por el profesor.

Hallar el área bajo la curva normal tipificada, dada las siguientes condiciones:

a) $0 \leq Z \leq 1.67$

b) $Z \geq -2.67$

c) El área a la derecha de Z es 0.0392

d) El área a la izquierda de Z es 0.9279

e) El área entre -1.18 y Z es 0.8192

## 2.3 DISTRIBUCIÓN NORMAL

El caso de la curva normal tipificada que acabamos de estudiar, es decir el caso en que la media es cero y la desviación típica es 1, es un caso muy especial que muy difícilmente se presenta en la realidad. Las estaturas, pesos, edades y muchas otras variables no tienen media cero ni desviación típica igual 1.

Pareciera entonces que la tabla de las áreas bajo la curva normal tipificada tienen una aplicación bien restringida; sin embargo esto no es así. Porque una variable normal cualquiera se puede trasformar en una variable normal tipificada según la proposición siguiente:

**Proposición:**
Si x es una variable normal cuya media es $\boldsymbol{\mu}$ y cuya desviación típica es $\boldsymbol{\sigma}$, entonces a partir de X se puede obtener una variable normal tipificada por medio de la transformación siguiente:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}$$

**Ejemplo 1.**
Si la variable x es normal con media 2 y desviación típica 5. Hallar:

a) $P(x > 3)$
b) $P(x > 1)$
c) $P(x < 0)$

Solución:
Como la variable x no es normal tipificada, no puede utilizarse la tabla directamente, si no que debe efectuarse primero la transformación $\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}$

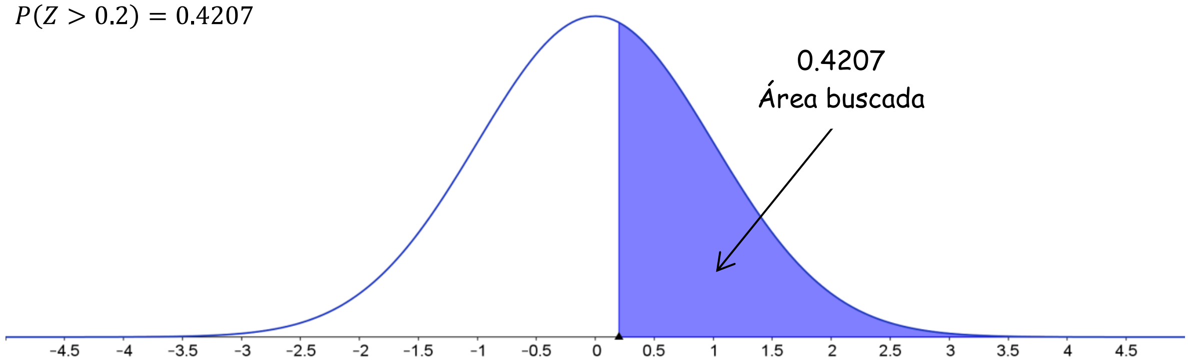
Cuando se trabaja con desigualdades debe tenerse presente que las operaciones aritméticas que se efectúan en un lado de las desigualdades deberán también efectuarse al otro lado pues de esta manera se obtendrá una desigualdad equivalente a la desigualdad original. Los valores buscados se obtienen de la siguiente manera:

a) $P(x > 3) = P\left(\frac{x-2}{5} > \frac{3-2}{5}\right)$

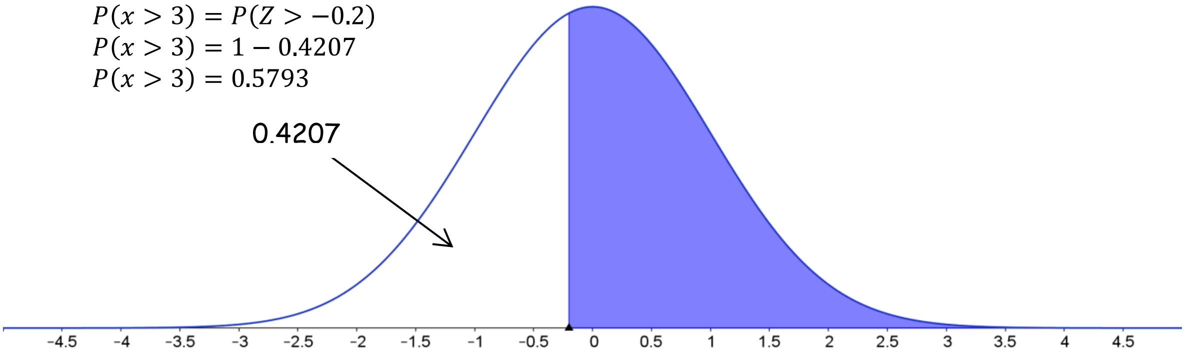
$P(x > 3) = P(Z > 0.2)$

Esta variable Z si es normal tipificada y al buscar directamente en la tabla, se tiene lo siguiente:

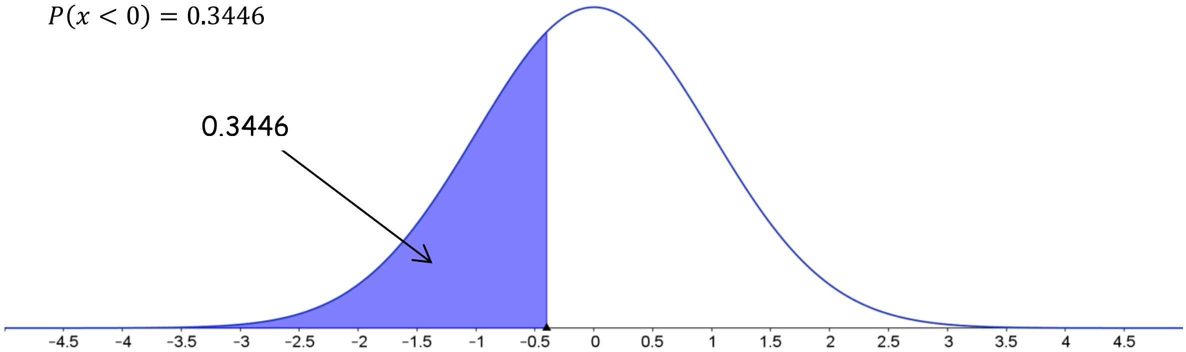
$P(Z > 0.2) = 0.4207$



b) $P(x > 3) = P\left(\frac{x-2}{5} > \frac{1-2}{5}\right)$
$P(x > 3) = P(Z > -0.2)$
$P(x > 3) = 1 - 0.4207$
$P(x > 3) = 0.5793$




c) $P(x < 0) = P\left(\frac{x-2}{5} < \frac{0-2}{5}\right)$
$P(x < 0) = P(Z < -0.4)$
$P(x < 0) = 0.3446$



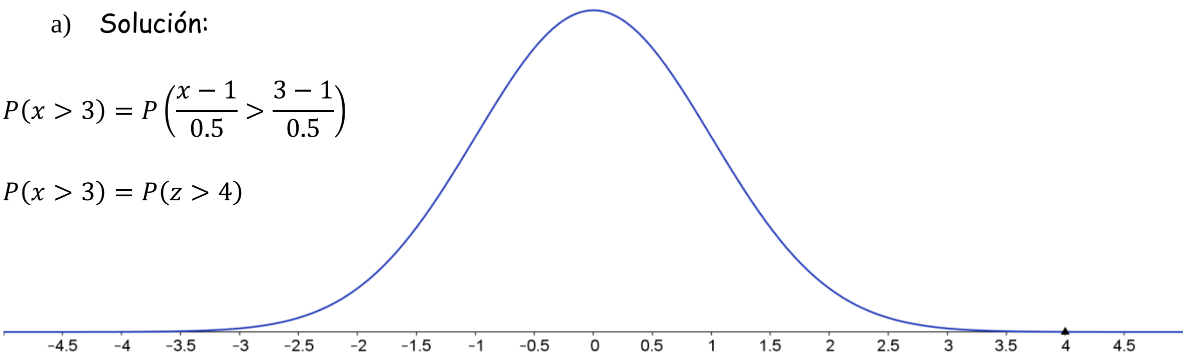

**Problema 2.**
Si la variable x es normal con media 1 y desviación típica 0.5. Encontrar:

a) $P(x > 3)$
b) $P(x > -1.5)$

a) Solución:

$$P(x > 3) = P\left(\frac{x-1}{0.5} > \frac{3-1}{0.5}\right)$$

$$P(x > 3) = P(z > 4)$$



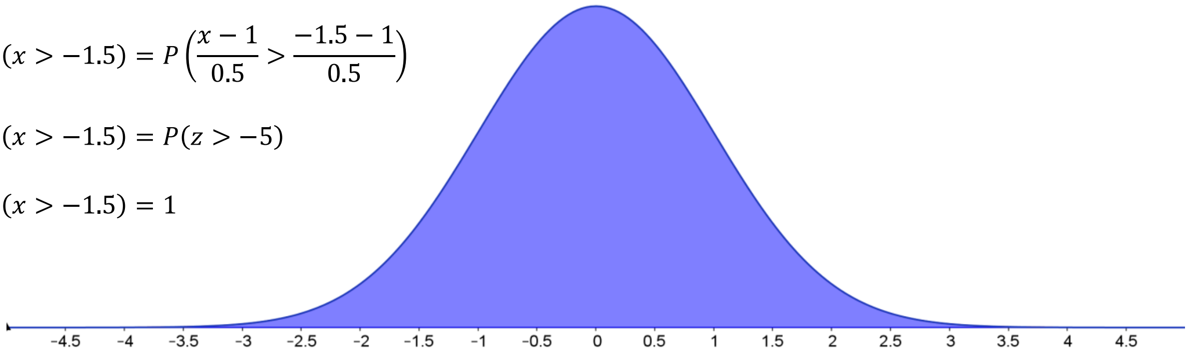
Como en la tabla el mayor valor que Z puede tomar es 3.9 se concluye que la probabilidad que Z sea mayor que 4 es cero. Por tanto $P(x > 3) = P(z > 4) = 0$

b) Solución:

$$P(x > -1.5) = P\left(\frac{x-1}{0.5} > \frac{-1.5-1}{0.5}\right)$$

$$P(x > -1.5) = P(z > -5)$$

$$P(x > -1.5) = 1$$




Como la mayoría de las variables que aparecen en la física, ingeniería, economía, ciencias sociales y otros distintos campos, son normales. Entonces la curva normal es de gran utilizad para resolver problemas prácticos de aplicación relacionados con las probabilidades. Veamos algunos ejemplos de aplicación:

**Ejemplo 3.**
Si se han realizado pruebas en focos eléctricos, observándose que el periodo de duración es normal, con media 1,800 horas y desviación típica 150 horas. Encontrar la probabilidad de que al comprar un foco, este dure:

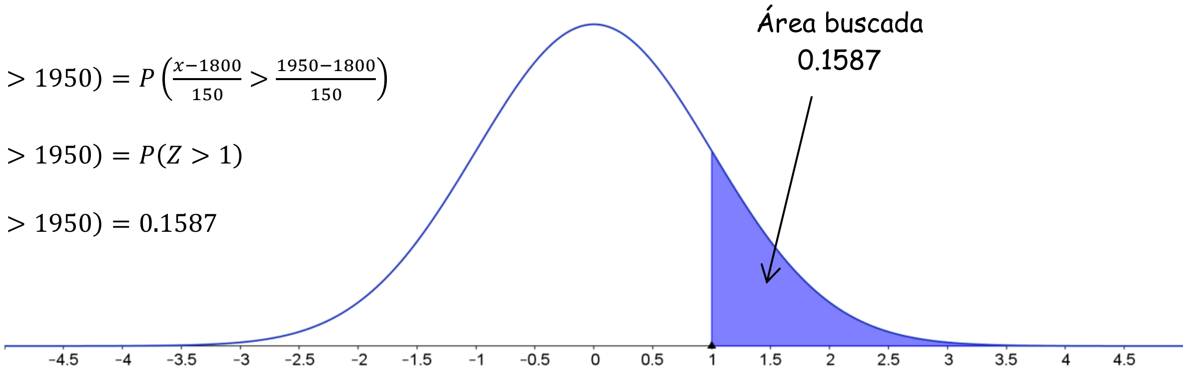
a) Más de 1950 horas.
b) Menos de 1740 horas.

Solución:
Sea x el tiempo de duración del foco.

a) $P(x > 1950) = P\left(\frac{x-1800}{150} > \frac{1950-1800}{150}\right)$

$P(x > 1950) = P(Z > 1)$

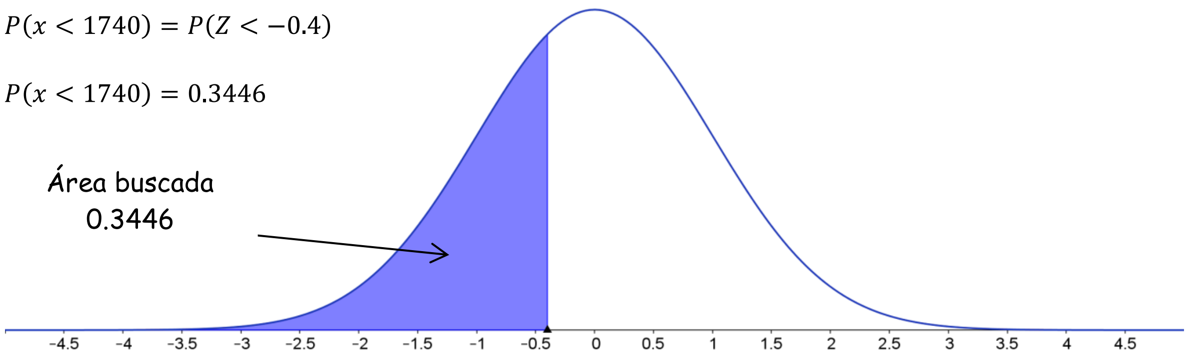
$P(x > 1950) = 0.1587$




b) $P(x < 1740) = P\left(\frac{x-1800}{150} < \frac{1950-1800}{150}\right)$

$P(x < 1740) = P(Z < -0.4)$

$P(x < 1740) = 0.3446$

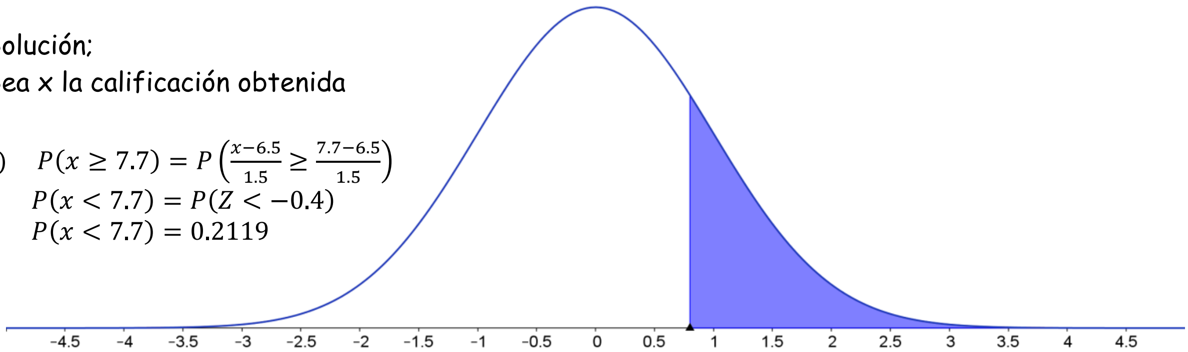


**Ejemplo 4.**
Si las calificaciones obtenidas en un curso son una variable normañ con media 6.5 y desviación típica 1.5 ¿Cuál es la probabilidad que al seleccionar un alumno de dicho curso, este tenga una calificación..?

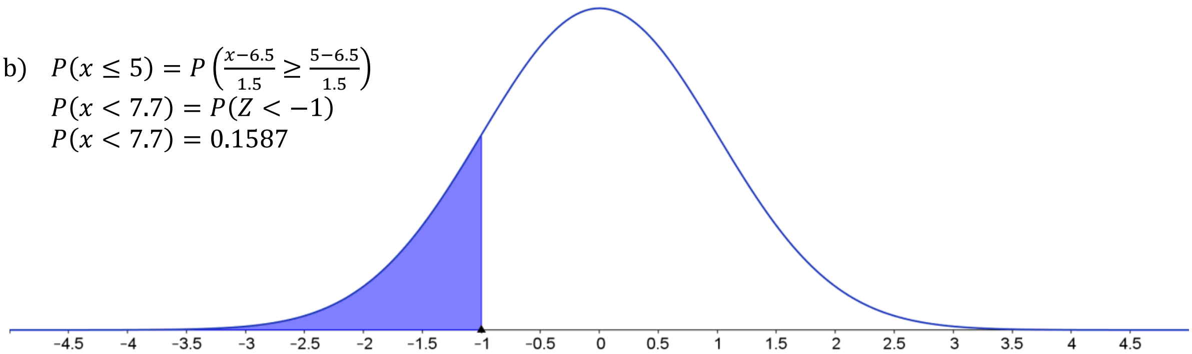
a) Mayor o igual a 7.7
b) Menor o igual a 5.0
c) Entre 3.5 y 6.5

Solución;
Sea x la calificación obtenida

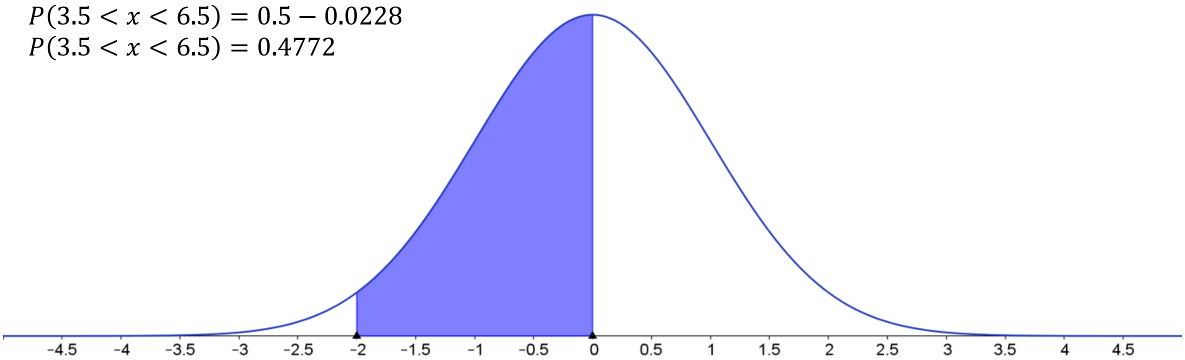
a) $P(x \geq 7.7) = P\left(\frac{x-6.5}{1.5} \geq \frac{7.7-6.5}{1.5}\right)$
$P(x < 7.7) = P(Z < -0.4)$
$P(x < 7.7) = 0.2119$




b) $P(x \leq 5) = P\left(\frac{x-6.5}{1.5} \geq \frac{5-6.5}{1.5}\right)$
$P(x < 7.7) = P(Z < -1)$
$P(x < 7.7) = 0.1587$




c) $P(3.5 < x < 6.5) = P\left(\frac{3.5-6.5}{1.5} < \frac{x-6.5}{1.5} < \frac{6.5-6.5}{1.5}\right)$
$P(3.5 < x < 6.5) = P(-2 < Z < 0)$
$P(3.5 < x < 6.5) = 0.5 - 0.0228$
$P(3.5 < x < 6.5) = 0.4772$



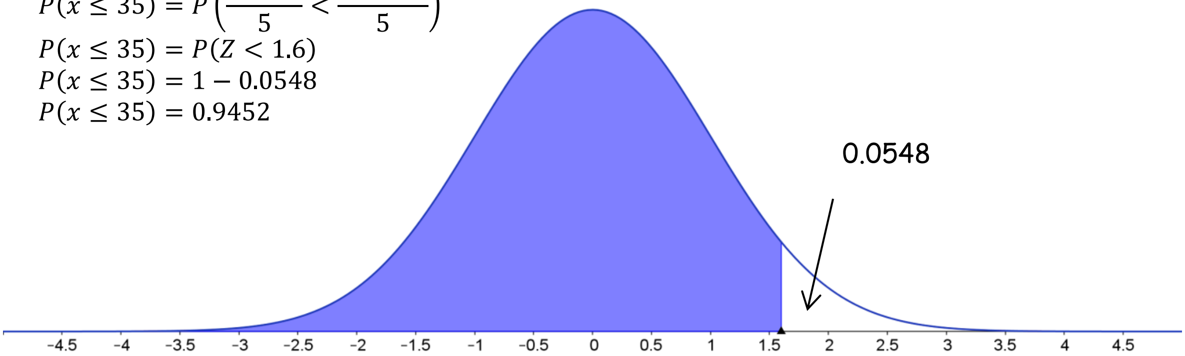

**Ejemplo 5.**
El tiempo empleado, en minutos, en trasladarse de Santa Ana hasta el aeropuesto “EL Salvador” por la autopista, es una variable normal con media igual a 27 minutos y desviación típica igual a 5 minuto; mientras que por la carretera del Litoral también es normal; pero con media 30 minutos y desviación típica 2 minutos. Si se dispone de 35 minutos, para llegar al aeropuerto ¿Cuál de las dos rutas conviene utilizar?

Solución:
Sea x el tiempo empleado en llegar al aeropuerto:

Se desea que $x \leq 35$
De las dos rutas, se debe escoger aquella en que la probabilidad de conseguir esto sea mayor:

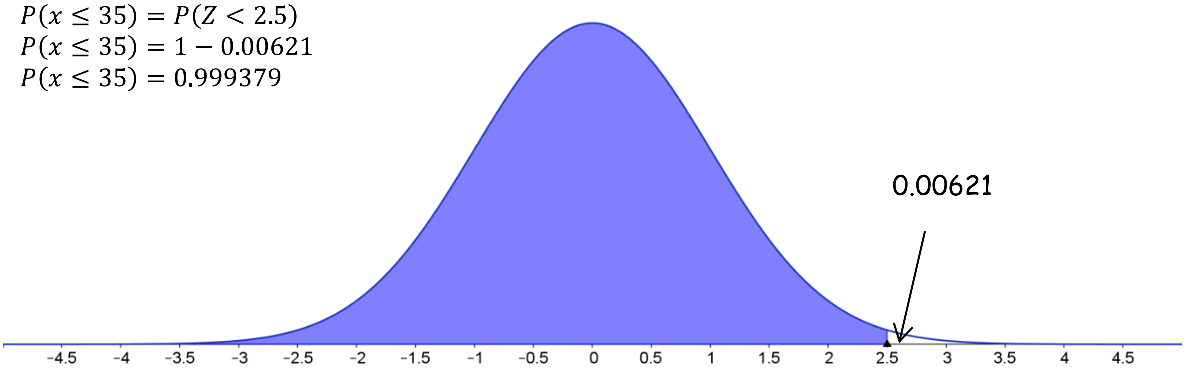
***RUTA AUTOPISTA***

$$P(x \leq 35) = P\left(\frac{x-27}{5} < \frac{35-27}{5}\right)$$
$$P(x \leq 35) = P(Z < 1.6)$$
$$P(x \leq 35) = 1 - 0.0548$$
$$P(x \leq 35) = 0.9452$$




***RUTA DEL LITORAL***

$$P(x \leq 35) = P\left(\frac{x-30}{2} < \frac{35-30}{2}\right)$$
$$P(x \leq 35) = P(Z < 2.5)$$
$$P(x \leq 35) = 1 - 0.00621$$
$$P(x \leq 35) = 0.999379$$




La probabilidad de tardarse 35 minutos o menos, es mayor por la ruta del litoral. Por lo tanto esta es, en este caso, la ruta que más le conviene utilizar.

**ACTIVIDAD DE INTEGRACION 5.**

Integre grupos de trabajo de 2 estudiantes como máximo (opcional). Discuta y desarrolle cada uno de los ejercicios y problemas que se presentan. Desarrollarlos en su cuaderno de clases de forma ordenada y estrictamente detallada y presentarlos individualmente en la fecha y tiempo estipulado por el profesor.

También desarrolle los ejercicios de la paginas 108 y 109 del libro de texto.

1. Una empresa vendedora de café envasa su producto en frascos de vidrio. La cantidad envasada de café es una variable normal de media 440 gramos y desviación típica 25 gramos. Si usted compra un frasco ¿Cuál es la probabilidad que el contenido de café sea superior a 455.5 gramos?