UNIDAD 6
SOLUCIONEMOS TRIANGULOS OBLICUANGULOS

	COMPLEJO EDUCATIVO CANTON TUTULTEPEQUE **GUION DE CLASE** *Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.*	*Grado: 2º año de bachillerato A y B* *Asignatura: Matemática* *Tiempo: ______________* *Periodo: ______________*

UNIDAD 6. SOLUCIONEMOS TRIANGULOS OBLICUANGULOS ***Objetivo de unidad:*** *Proponer soluciones a situaciones problemáticas del entorno en las cuales se requiera la resolución de triángulos oblicuángulos aplicando los teoremas del seno y del coseno, así como valorar la opinión de los demás.*	***Metodología:*** *La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.*

CONTENIDOS CONCEPTUALES	CONTENIDOS PROCEDIMENTALES	CONTENIDOS ACTITUDINALES
1. Triángulos oblicuángulos.	✓ *Identificación, determinación y ejemplificación del triángulo oblicuángulo.*	✓ *Confianza e interés al identificar, determinar y ejemplificar triángulos oblicuángulos.*
1.1 Teorema del seno: $\frac{sen(\alpha)}{a}=\frac{sen(\beta)}{b}=\frac{sen(\gamma)}{c}$	✓ *Deducción y explicación de la expresión que denota el teorema del seno.* ✓ *Utilización del teorema del seno en la solución de ejercicios y problemas sobre triángulos oblicuángulos.*	✓ *Seguridad al deducir y explicar el teorema del seno.* ✓ *Proposición y perseverancia al trabajar, en equipo, la resolución de problemas aplicando el teorema del seno.*

Objetivo: *que el alumno sea capaz de:* ✓ *Identificar, determinar y ejemplificar con interés y confianza triángulos oblicuángulos.* ✓ *Deducir y explicar con seguridad la expresión que denota el teorema del seno.* ✓ *Utilizar con seguridad y precisión el teorema del seno, al solucionar ejercicios sobre triángulos oblicuángulos.* ✓ *Resolver con actitud propositiva y perseverante problemas aplicando el teorema del seno trabajando en equipo*	***Material de Apoyo*** • *Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio.* • *Matemática 2º año de bachillerato Santillana (pioneros)*
Indicadores de logro. ✓ *Identifica, determina y ejemplifica con interés y confianza triángulos oblicuángulos.* ✓ *Deduce y explica con seguridad la expresión que denota el teorema del seno.* ✓ *Utiliza con seguridad y precisión el teorema del seno, al solucionar ejercicios sobre triángulos oblicuángulos.* ✓ *Resuelve con actitud propositiva y perseverante problemas aplicando el teorema del seno trabajando en equipo*	***Evaluación:*** *Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.* ✓ *Orden y aseo 5%* ✓ *Puntualidad 5%* ✓ *Desarrollo correcto 90%*

Actividad Diagnostica:
Entra al siguiente link
http://rolandotzun.wordpress.com/
Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

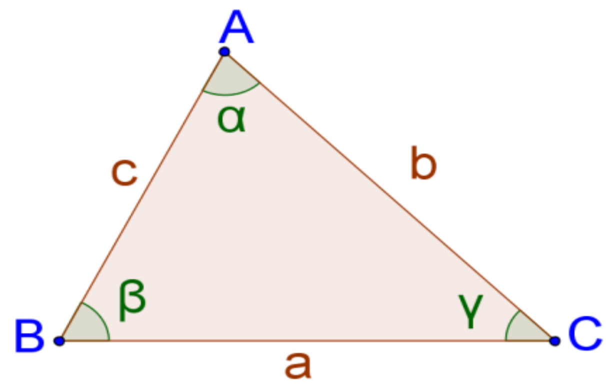
Actividad	Tiempo
1. Bienvenida y asistencia	
2. Presentación del contenido y objetivo de la clase	
3. Exploración de Conocimientos Previos	
4. Introducción a la temática	
5. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
6. Delegación de actividades y cierre	
Tiempo Hora Clase	

Las herramientas básicas que se utilizan para resolver un triángulo oblicuángulo son: El teorema del Seno y el Teorema del Coseno.

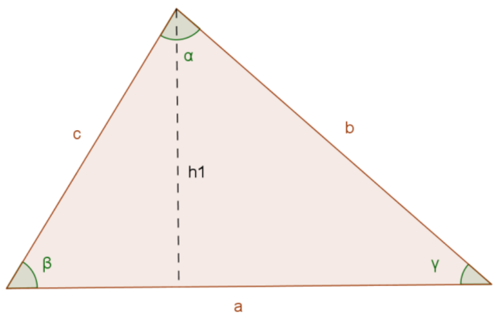
Teorema del Seno

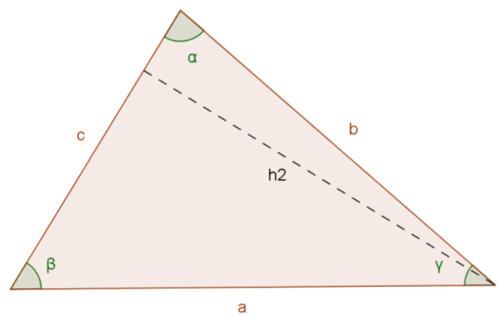
Si α, β, γ son los angulos de un triangulo cualquiera; mientras que que a, b, c son, respectivamente, las longitudes de los lados opuestos a estos angulos, entonces se verifica que:

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\delta)}$$



Demostracion:
Consideremos el triangulo ΔABC, en el cual aparecera trazada una altura a la cual le llamaremos h_1 y luego mostraremos el mismo triangulo en el cual trazaremos la otra altura a la cual le llamaremos h_2.





La altura h1 divide al triangulo dado en dos triángulos rectángulos para los cuales se cumple lo siguiente:

$$\frac{h_1}{c} = sen(\beta) \qquad \frac{h_1}{b} = sen(\delta)$$
$$h_1 = c * sen(\beta) \qquad h_1 = b * sen(\delta)$$

De acuerdo con lo anterior:

$$c * sen(\beta) = b * sen(\delta)$$

$$\frac{c}{sen(\delta)} = \frac{b}{sen(\beta)}$$

Por otra parte la altura h2 divide al triangulo dado en dos triángulos rectángulos, en los cuales se verifica lo siguiente:

$$\frac{h_2}{b} = sen(\alpha) \qquad \frac{h_2}{a} = sen(\beta)$$
$$h_2 = b * sen(\alpha) \qquad h_2 = a * sen(\beta)$$

De acuerdo a lo anterior_

$$b * sen(\alpha) = a * sen(\beta)$$

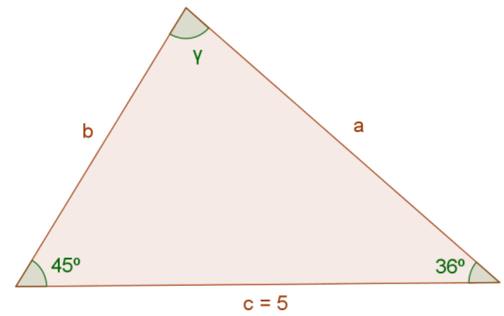
$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)}$$

Al reunir las igualdades 1 y 2 se tiene que:

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\delta)}$$

Esto completa la demostración deseada.

Ejemplo 1.
Resolver el siguiente triangulo:



Solución:
Como la suma de los tres ángulos internos de un triángulo es igual a 180°, entonces:

$\gamma + 45º + 36º = 180º$
$\gamma = 180º - (45º + 36º)$
$\gamma = 180º - 81º$
$\gamma = 99º$

Ahora por el teorema del seno tenemos:

$$\frac{a}{sen(45º)} = \frac{5}{sen(99º)}$$

$$a = \frac{5sen(45º)}{sen(99º)}$$

$$a = 3.5796$$

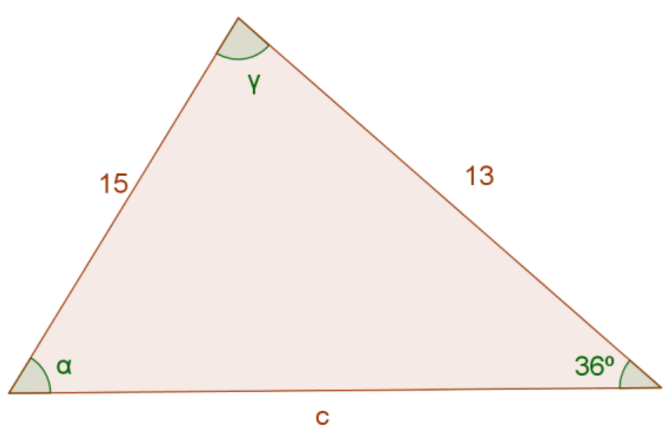
$$\frac{b}{sen(36º)} = \frac{5}{sen(99º)}$$

$$b = \frac{5sen(36º)}{sen(99º)}$$

$$b = 2.97556$$

Ejemplo 2.
Encontrar las demás partes del triángulo, si se sabe que $a = 13, b = 15\ y\ \alpha = 67.38$

Solución:



$$\frac{13}{sen(\alpha)} = \frac{15}{sen(67.38º)}$$

$$13sen(67.38) = 15sen(\alpha)$$

$$\frac{13sen(67.38)}{15} = sen(\alpha)$$

$$0.79999 = sen(\alpha)$$

$$sen^{-1}(0.79999) = \alpha$$

$$53.13º = \alpha$$

$67.38º + 53.13º + \gamma = 180º$

$\gamma = 180º - (67.38 - 53.13º)$

$\gamma = 59.49º$

$$\frac{c}{sen(59.49)} = \frac{15}{sen(67.38º)}$$

$$c = \frac{15}{sen(67.38º)}$$

$$c = 14$$

ACTIVIDAD DE INTEGRACION.

Integre grupos de trabajo de 2 estudiantes como máximo (opcional). Discuta y desarrolle cada uno de los ejercicios y problemas que se presentan en la página 128 del libro de texto apartado 8, 9, 10, 11, 12, 13. Desarrollarlos en su cuaderno de clases de forma ordenada y estrictamente detallada y presentarlos individualmente en la fecha y tiempo estipulado por el profesor.

	COMPLEJO EDUCATIVO CANTON TUTULTEPEQUE GUION DE CLASE *Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.*	*Grado: 2º año de bachillerato A y B* *Asignatura: Matemática* *Tiempo: _______________* *Periodo: _______________*

UNIDAD 6. SOLUCIONEMOS TRIANGULOS OBLICUANGULOS ***Objetivo de unidad:*** *Proponer soluciones a situaciones problemáticas del entorno en las cuales se requiera la resolución de triángulos oblicuángulos aplicando los teoremas del seno y del coseno, así como valorar la opinión de los demás.*	***Metodología:*** *La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.*

CONTENIDOS CONCEPTUALES	CONTENIDOS PROCEDIMENTALES	CONTENIDOS ACTITUDINALES
1.2 Teorema del coseno: $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCos(\alpha)}$ $\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2acCos(\beta)}$ $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2abCos(\gamma)}$	✓ *Deducción y explicación de la expresión que denota el teorema del coseno.* ✓ *Utilización del teorema del coseno en la solución de ejercicios sobre triángulos oblicuángulos.* ✓ *Resolución de problemas aplicando el teorema del coseno.*	✓ *Seguridad al deducir y explicar el teorema del coseno.* ✓ *Seguridad y precisión al aplicar el teorema del coseno.* ✓ *Proposición y perseverancia al trabajar en equipo, la resolución de problemas aplicando el teorema del seno.*

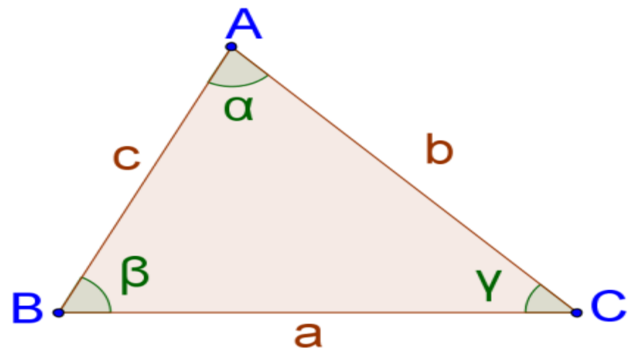
Objetivo: *que el alumno sea capaz de:* ✓ *Deducir y explicar la expresión que denota el teorema del coseno.* ✓ *Utilizar el teorema del coseno en la solución de ejercicios sobre triángulos oblicuángulos.* ✓ *Resolver problemas aplicando el teorema del coseno.*	***Material de Apoyo*** • *Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio.* • *Matemática 2º año de bachillerato Santillana (pioneros)*
Indicadores de logro. ✓ *Deduce y explica con seguridad la expresión que denota el teorema del coseno.* ✓ *Utiliza con seguridad y precisión el teorema del coseno al solucionar ejercicios sobre triángulos oblicuángulos.* ✓ *Resuelve con actitud propositiva y perseverante problemas aplicando el teorema del coseno (trabajo en equipo).*	***Evaluación:*** *Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.* ✓ *Orden y aseo 5%* ✓ *Puntualidad 5%* ✓ *Desarrollo correcto 90%*

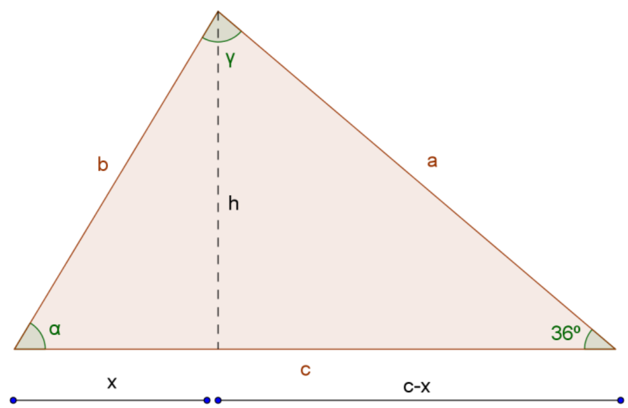
Actividad	Tiempo
7. Bienvenida y asistencia	
8. Presentación del contenido y objetivo de la clase	
9. Exploración de Conocimientos Previos	
10. Introducción a la temática	
11. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
12. Delegación de actividades y cierre	
Tiempo Hora Clase	

Actividad Diagnostica:
Entra al siguiente link
http://rolandotzun.wordpress.com/
Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

Teorema de Cosenos
Si α, β, γ son los ángulos de un triángulo cualquiera; mientras que a, b, c son, respectivamente, las longitudes de los lados opuestos a estos angulos, entonces se verifica que:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * cos(\alpha)}$$
$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2 * a * c * cos(\beta)}$$
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * cos(\delta)}$$





Demostración:

Demostraremos la primera igualdad porque las otras se pueden demostrar de manera parecida.

Consideremos el triángulo ΔABC en el cual aparece trazada la altura "h", que determina dos triángulos rectángulos.

Para el triángulo de la izquierda.
Por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = b^2 - x^2$$

Para el triángulo de la derecha.
Por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 - (c - x)^2$$

Al igualar se tiene:

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$
$$b^2 - x^2 = a^2 - (c^2 - 2cx + x^2)$$
$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$
$$b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 = a^2$$
$$b^2 + c^2 - 2cx = a^2$$

Pero $\frac{x}{b} = \cos(\alpha)$
$x = b * \cos(\alpha)$

Al sustituir el valor de x resulta:

$$\boldsymbol{b^2 + c^2 - 2 * b * c * cos(\alpha) = a^2}$$

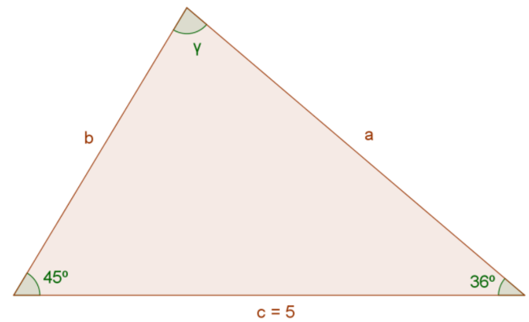
Esto termina demostrando la primera igualdad.

Lo que el teorema del coseno dice es lo siguiente:

En un cuadrado cualquiera el cuadrado de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman.

Ejemplo 1.

Resolver un triángulo cuyos lados son $a = 15, b = 21$ y $c = 32$.



Solución:

Se debe encontrar los tres ángulos; para ello hacemos uso del teorema del coseno.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * cos(\alpha)$$
$$15^2 = 21^2 + 32^2 - 2(21)(32)cos(\alpha)$$
$$225 = 1465 - 1344cos(\alpha)$$
$$1344cos(\alpha) = 1465 - 225$$
$$cos(\alpha) = \frac{1465 - 225}{1344}$$
$$cos(\alpha) = 0.9296$$
$$\alpha = cos^{-1}(0.9296)$$
$$\alpha = 22.69º$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 * a * c * cos(\beta)$$
$$21^2 = 15^2 + 32^2 - 2(15)(32)cos(\beta)$$
$$441 = 1249 - 960cos(\beta)$$
$$960cos(\beta) = 1249 - 441$$
$$cos(\beta) = \frac{1249 - 441}{960}$$
$$cos(\beta) = 0.8416$$
$$\beta = cos^{-1}(0.8416)$$
$$\alpha = 32.68º$$

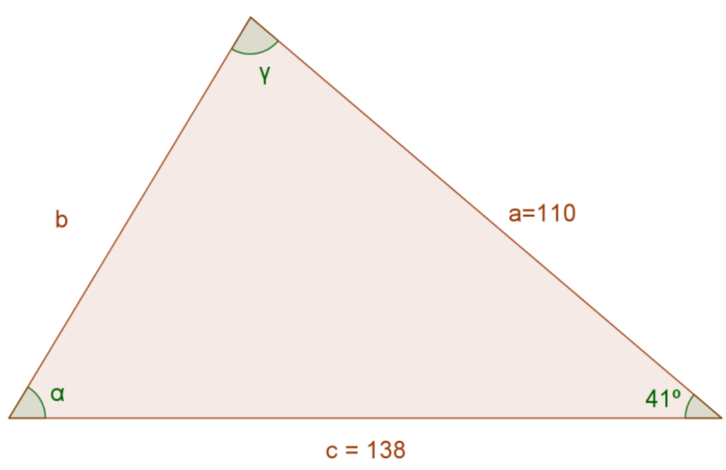
$$\alpha + \beta + \gamma = 180º$$
$$22.69º + 32.68º + \gamma = 180º$$
$$\gamma = 180º - 22.69º - 32.68º$$
$$\gamma = 124.63º$$

Ejemplo 2:

Dos lados de un triángulo son 110 y 138; mientras que el triángulo comprendido entre ellos es de 41°. Resolver dicho triangulo.

Solución:

Designemos por a y c los lados conocidos, el desconocido es b.



Por el teorema del coseno

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 * a * c * cos(\beta)$$

$$b^2 = 110^2 + 138^2 - 2(110)(138)cos(41º)$$

$$b^2 = 8231$$

$$b = 90.7249$$

Aplicamos ahora el teorema del seno:

$$\frac{90.7249}{sen(41º)} = \frac{110}{sen(\alpha)}$$
$$sen(\alpha) = \frac{110sen(41º)}{90.7249}$$
$$sen(\alpha) = 0.79544$$
$$\alpha = 52.7º$$

$$\frac{90.7249}{sen(41º)} = \frac{138}{sen(\gamma)}$$
$$sen(\gamma) = \frac{138sen(41º)}{90.7249}$$
$$sen(\gamma) = 0.9979$$
$$\gamma = 86.3º$$

Gracias a los ejemplos anteriores podemos darnos cuenta que para resolver un triángulo oblicuángulo debemos tener presente que:

"la suma de los tres ángulos internos de un triángulo cualquiera es siempre igual a 180°"

Además:

a) Cuando se conocen los tres lados debe utilizarse el teorema del Coseno.
b) Cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos debe utilizarse primeramente el teorema del coseno y luego el del seno.
c) Cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos entonces debe utilizarse el teorema del seno.
d) Cuando se conocen dos ángulos y un lado entonces debe utilizarse el teorema del seno.

En resumen se tiene lo siguiente:

Caso **Medio a emplear**

LLL ---------------------→ Teorema de Cosenos

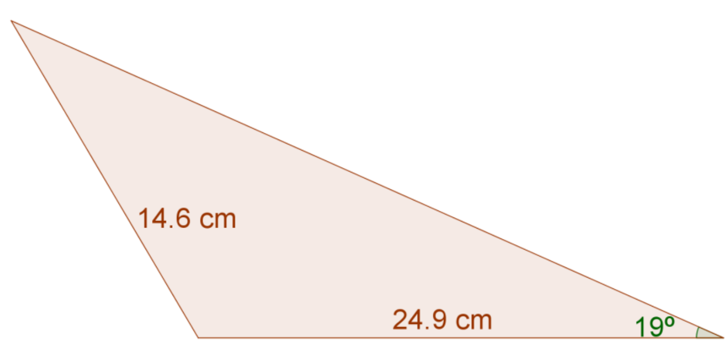
LAL ---------------------→ Teorema de Cosenos y Teorema de Senos.

LLA ---------------------→ Teorema del Seno

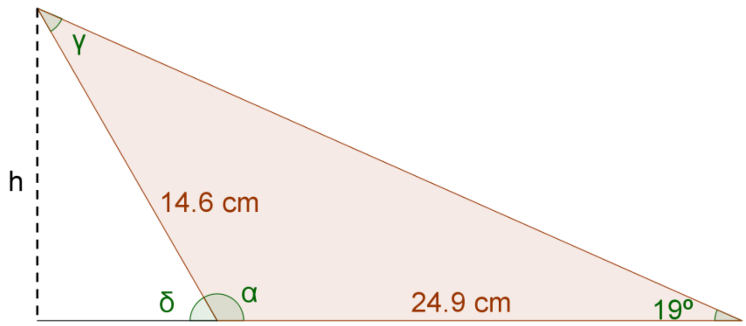
AAL ---------------------→ Teorema del Seno

Aplicación Simultánea de Teoremas de Senos y Teorema de Cosenos.

Ejemplo 1
Calcular el área del triángulo mostrado:



Solución:
Necesitamos conocer la altura h del triángulo. Primeramente hacemos uso del teorema del seno para calcular el valor del ángulo δ.



$$\frac{14.6}{sen(19º)} = \frac{24.9}{sen(\gamma)}$$

$$sen(\gamma) = \frac{24sen(19º)}{14.6}$$

$$sen(\gamma) = 0.55525$$

$$\gamma = sen^{-1}(52.7º)$$

$$\gamma = 33.73º$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180º$$

$$\alpha + 33.73º + 19º = 180º$$

$$\alpha = 180º - (33.73º + 19º)$$

$$\alpha = 127.27º$$

$$\alpha + \delta = 180º$$

$$127.27º + \delta = 180º$$

$$\delta = 180º - 127.27º$$

$$\delta = 52.73º$$

$$sen(52.73º) = \frac{h}{14.6}$$

$$14.6sen(52.73º) = h$$

$$11.6185 = h$$

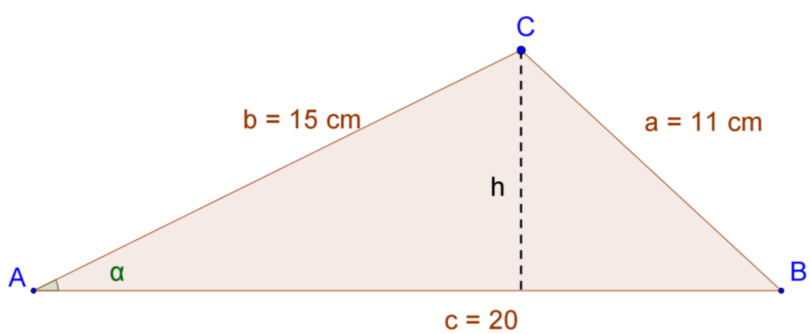
El área de un triángulo es

$$\frac{base\ x\ altura}{2}$$

$$area = \frac{24.9\ x\ 11.6185}{2}$$

$$area144.65\ cm$$

Ejemplo 2
Calcular el área del triángulo cuyos lados miden 11 cm, 15 cm y 20 cm



Entonces para obtener el área es necesario calcular la altura h. y para ello es preciso conocer el valor den ángulo "a", el cual obtendremos gracias al teorema de Cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * cos(\alpha)$$

$$11^2 = 15^2 + 20^2 - 2 * 15 * 20 * cos(\alpha)$$

$$2 * 15 * 20 * cos(\alpha) = 15^2 + 20^2 - 11^2$$

$$600cos(\alpha) = 504$$

$$cos(\alpha) = \frac{504}{600}$$

$$cos(\alpha) = 0.84$$

$$\alpha = cos^{-1}(0.84)$$

$$\alpha = 32.8599º$$

Hacemos uso del teorema de senos

$$\frac{h}{15\ cm} = sen\ 32.86$$

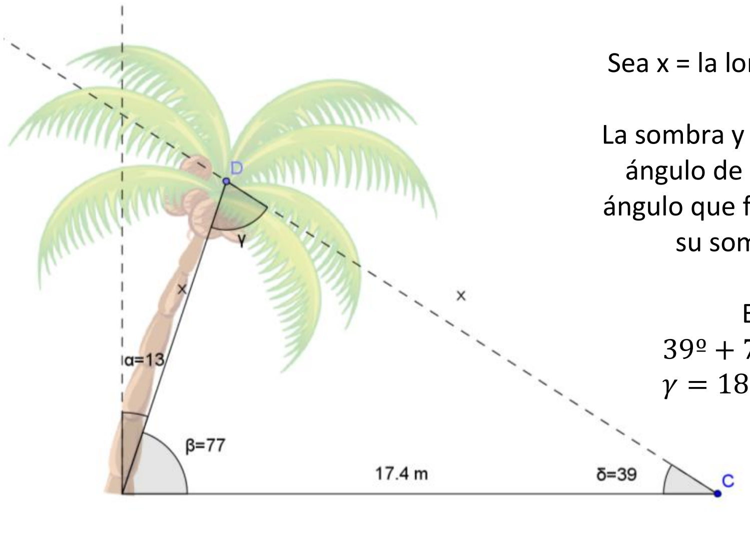
$$h = 15 * sen\ 32.8599$$

$$h = 8.1388$$

el área del triángulo es: 81.388 cm^2

Ejemplo 3

Una palmera creció recta, pero inclinada 13° de la vertical. Si cuando el ángulo de elevación del sol es de 39°, la palmera proyecta una sombra que mide 17.4 m ¿Cuál es su longitud?



Sea x = la longitud de la palmera

La sombra y la vertical forman un ángulo de 90º. Por lo tanto el ángulo que forma la palmera con su sombra es de 77º.

Entonces:

$$39º + 77º + \gamma = 180º$$
$$\gamma = 180º - 39º - 77º$$
$$\gamma = 64º$$

Por teorema de senos:

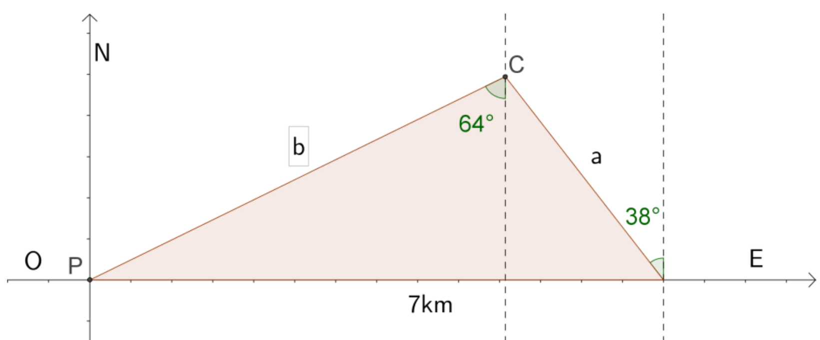
$$\frac{x}{sen(39º)} = \frac{17.4}{sen(39º)}$$

$$x = \frac{17.4\,sen(39º)}{sen(39º)}$$

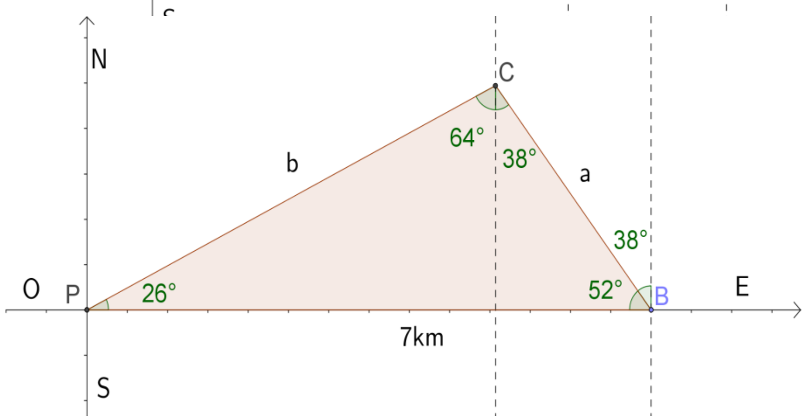
$$x = \frac{17.4\,sen(39º)}{sen(39º)}$$

Ejemplo 4

Desde un punto P un ciclista se dirige hacia el este. Cuando ha recorrido 7 km vira en rumbo N38°O y después para retornar al punto P vira con rumbo S64°O ¿Cuál es la distancia recorrida por el ciclista?



La dirección horizontal y vertical forman un ángulo de 90° y como además la suma de los tres ángulos internos de un triángulo cualquiera es siempre igual a 180°, se tiene el triángulo completo siguiente:



Por teorema de senos:

$$\frac{a}{sen(26º)} = \frac{7}{sen(102º)}$$

$$a = \frac{7\,sen(26º)}{sen(102º)}$$

$$a = 3.137$$

Por teorema de senos:

$$\frac{b}{sen(52º)} = \frac{7}{sen(102º)}$$

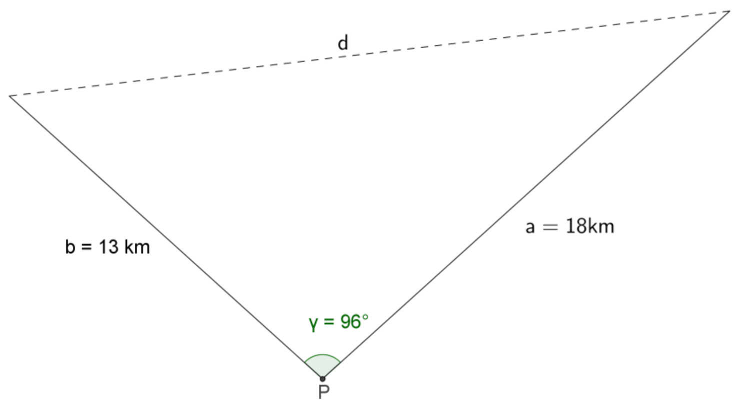
$$b = \frac{7sen(52º)}{sen(102º)}$$

$$b = 5.639$$

$Distancia\ total\ recorrida: 7\ km\ +\ 3.137\ km\ +\ 5.639\ km\ =\ 15.776\ km$

Ejemplo 5

De la intersección de dos calles rectas que forman un ángulo de 96º; parten al mismo tiempo dos corredores. Uno por cada una de las calles. El más rápido a una velocidad de 12 km/h y el otro a 10 km/h. Después de correr durante una hora y media ambos corredores se detendrán ¿Qué distancia los separa cuando se detengan?



Por esta ocasión es más conveniente hacer uso del teorema de Cosenos.

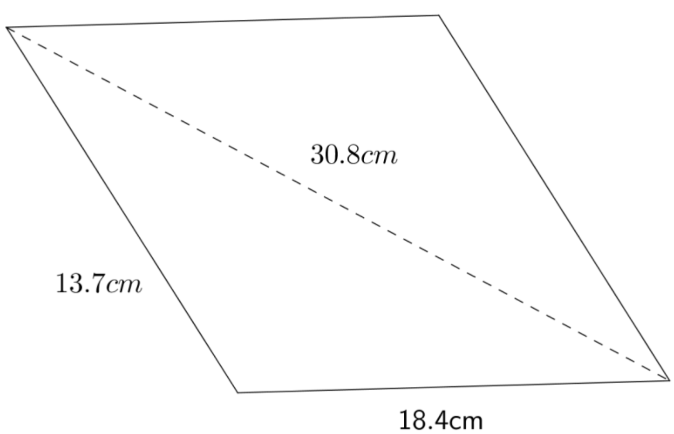
$$d^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * Cos(96º)$$

$$d^2 = 18^2 + 13^2 - 2(18)(13)Cos(96º)$$

$$d^2 = 605.44537$$

$$d = 24.606\ km\ aproximadamente$$

Ejemplo 6.
Los lados de un paralelogramo miden 13.7 cm y 18.4 cm. Una de sus diagonales mide 30.8 cm. Calcular su área. La diagonal divide al paralelogramo en dos triangulo iguales.



Calculemos primeramente el valor del ángulo θ
Por el teorema de Cosenos:

$$13^2 = 30.8^2 + 18.4^2 - 2(30.8)(18.4)Cos(\theta)$$

$$13^2 - 30.8^2 - 18.4^2 = -2(30.8)(18.4)Cos(\theta)$$

$$1{,}133.44 = 1{,}099.51Cos(\theta)$$

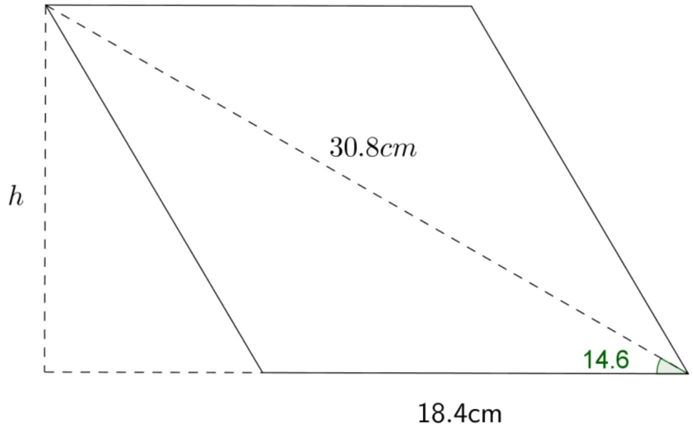
$$\frac{1{,}133.44}{1{,}099.51} = Cos(\theta)$$

$$0.97006 = Cos(\theta)$$

$$Cos^{-1}(0.97006) = \theta$$

$$14.06 = \theta$$

Al bajar la altura h y prolongar la base del triángulo inferior queda determinado un triángulo rectángulo.



Por razones trigonométricas

$$\frac{h}{30.8} = sen(14.6)$$

$$h = 30.8 * sen(14.6)$$

$$h = 7.76$$

El área del triángulo inferior es:

$$Area = \frac{(18.4)(7.76)}{2}$$

$$Area = 71.392\ cm^2$$

El área buscada es dos veces el área del triángulo. Área del paralelogramo:
$2(71.392\ cm^2) = 142.784\ cm^2$

ACTIVIDAD DE INTEGRACION.

Integre grupos de trabajo de 2 estudiantes como máximo (opcional). Discuta y desarrolle cada uno de los ejercicios y problemas que se presentan en la página 131 del libro de texto apartado 14, 15, 16, 17. Desarrollarlos en su cuaderno de clases de forma ordenada y estrictamente detallada y presentarlos individualmente en la fecha y tiempo estipulado por el profesor.