UNIDAD 7

RESOLVAMOS DESIGUALDADES

	COMPLEJO EDUCATIVO CANTON TUTULTEPEQUE **GUION DE CLASE** *Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.*	*Grado: 1º año de bachillerato* *Asignatura: Matemática* *Tiempo:_______________* *Periodo: _______________*

UNIDAD 7. RESOLVAMOS DESIGUALDADES ***Objetivo de unidad:*** *Proponer soluciones a problemas relacionados con desigualdades lineales y cuadráticas representando los intervalos en la recta real, en colaboración de los demás.*	***Metodología:*** *La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.*

CONTENIDOS CONCEPTUALES	***CONTENIDOS PROCEDIMENTALES***	***CONTENIDOS ACTITUDINALES***
*1. **Intervalos.*** • *Tipos de Intervalos : [a,b],]a,b[,]a,b],[a,b[,]-∞,+∞[* • *Gráfica.*	✓ *Notación, clasificación y explicación de intervalos finitos, cerrados, semiabiertos, abiertos, finitos e infinitos.* ✓ *Graficación de intervalos cerrados, semiabiertos, abiertos e infinitos sobre la recta numérica.*	✓ *Seguridad al denotar, clasificar y explicar intervalos.* ✓ *Seguridad al graficar un intervalo.* ✓ *Orden y limpieza en la realización de gráficos.*

Objetivo: *que el alumno sea capaz de:* ✓ *Denotar, clasificar y explicar intervalos finitos, cerrados, semiabiertos, abiertos, finitos e infinitos.* ✓ *Graficar intervalos cerrados, semiabiertos, abiertos e infinitos sobre la recta numérica.*	***Material de Apoyo*** • *Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio.* • *Matemática 2º año de bachillerato Santillana (pioneros)*
Indicadores de logro. ✓ *Denota, clasifica y explica intervalos finitos, cerrados, semiabiertos, abiertos, finitos e infinitos.* ✓ *Grafica intervalos cerrados, semiabiertos, abiertos e infinitos sobre la recta numérica.*	***Evaluación:*** *Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.* ✓ *Orden y aseo 5%* ✓ *Puntualidad 5%* ✓ *Desarrollo correcto 90%*

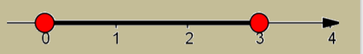
Actividad	Tiempo
1. Bienvenida y asistencia	
2. Presentación del contenido y objetivo de la clase	
3. Exploración de Conocimientos Previos	
4. Introducción a la temática	
5. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
6. Delegación de actividades y cierre	
Tiempo Hora Clase	

Actividad Diagnostica:
Entra al siguiente link
http://rolandotzun.wordpress.com/
Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

Intervalos

PARA PENSAR

Considera el conjunto que se representa en la recta numérica ¿es este un subconjunto de los números reales?



Reúnete con tus compañeros y coméntale tus respuestas. Luego anota el tiempo que permaneces en clase y di si se puede expresar como intervalo abierto.

IDEA IMPORTANTE

En un intervalo los extremos cerrados se incluyen en la solución. Los extremos abiertos NO.

Un intervalo es un conjunto de números que se corresponden con un conjunto de los puntos de un segmento de la recta real y cuyos elementos tienen como limites a dos extremos **a y b** que pueden pertenecer o no a dicho intervalo.

1. Tipos de intervalos

Estos pueden clasificarse en: intervalos abiertos, intervalos semiabiertos o semicerrados, intervalos cerrados e intervalos al infinito.

1.1. Intervalo abierto

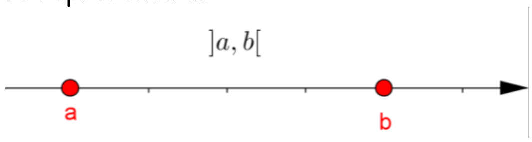
Sean a y b números reales tales que a es menor que b. Se llama intervalo abierto de extremos a y b, al conjunto cuyos elementos son los números reales x que cumplen la condición:

$$x > a \quad y \quad x < b$$

Entonces, en un intervalo abierto, los extremos no pertenecen a dicho intervalo. Se simboliza con paréntesis o corchetes abiertos hacia el sentido contrario.

$$(a, b) =]a, b[= \{x \in R / a < x < b\}$$

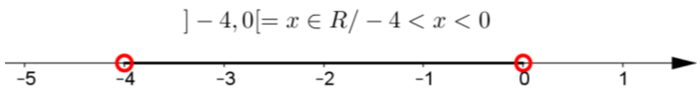
Geométricamente se representa así:



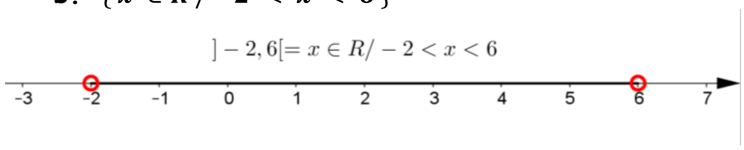
Ejemplos

1. **Expresar cada conjunto en forma de intervalo y representarlo en una recta.**

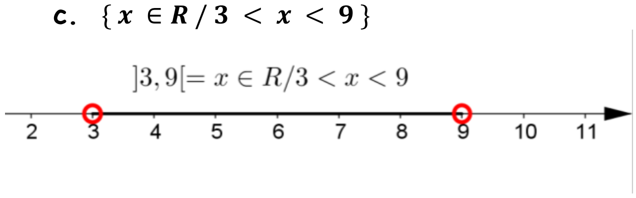
   a. $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} / -\boldsymbol{4} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0}\}$



   b. $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} / -\boldsymbol{2} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{6}\}$



   c. $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} / \boldsymbol{3} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{9}\}$



Se escriben los valores extremos en corchetes. Luego se dibuja el conjunto en cada recta numérica.

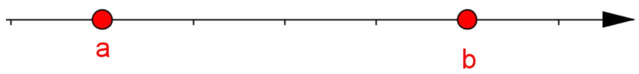
1.2. Intervalo cerrado

Si los valores extremos pertenecen al intervalo se denomina cerrado. Se simboliza con corchetes.

$$[a,b] = \{ x \in R \,/\, a \leq x \leq b \}$$

Geométricamente se representa así:

$[a,b]$

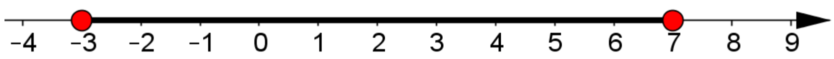


Ejemplos

1. **Escribir los siguientes intervalos en notación de conjuntos y representarlos geométricamente.**

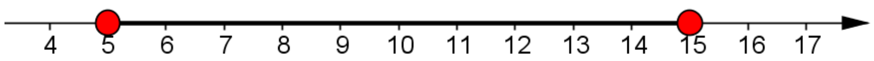
a. [-3,7]

$$[-3,7] = x \in R/ -3 \leq x \leq 7$$



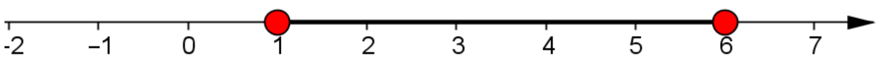
b. [5,15]

$$[5,15] = x \in R/5 \leq x \leq 15$$



c. [1,6]

$$[1,6] = x \in R/1 \leq x \leq 6$$



PARA DESARROLAR

Toma cuatro tiempos utilizados en realizar una actividad y exprésalos en forma de intervalo.

Por ejemplo, el tiempo que dura una clase, tiempo para bañarse, etc.

IDEA IMPORTANTE

El símbolo $+\infty$ se lee más infinito y $-\infty$ menos infinito. Estos símbolos se utilizan para indicar una tendencia de crecimiento o decrecimiento.

PARA DESARROLLAR

El tiempo utilizado por una sección de segundo año de bachillerato en resolver la prueba PAES se expresa en el intervalo:

$$2.45h \leq x < 4h$$

¿Qué puedes decir acerca del número de horas que emplean en la prueba?

IDEA IMPORTANTE

Axioma de Arquímedes.

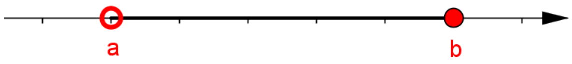
Dado el punto p sobre una recta numérica existe un intervalo determinado por dos enteros consecutivos "a" y "a+1", tal que "p" pertenece a dicho intervalo.

1.3 Intervalos semiabiertos y semicerrados.

Si uno de los extremos del intervalo pertenece a este y el otro no, se denomina intervalo semiabierto o semicerrado.

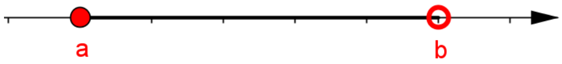
Semiabierto por la izquierda

$$(a, b] =]a, b] = x \in R/a < x \leq b$$



Semiabierto por la derecha.

$$[a, b) = [a, b[= x \in R/a \leq x < b$$

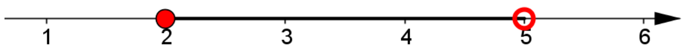


Ejemplos

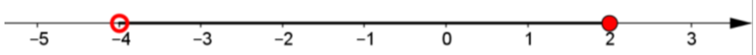
a. Expresar cada conjunto en forma de intervalo e indicar si es abierto por la derecha o por la izquierda.

Los extremos que contienen al símbolo $\leq$ son cerrados y $<$ son abiertos.

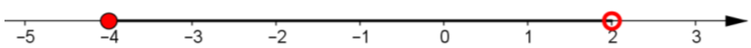
a. $\{x \in R/\ 2 \leq x < 5\}$
$\{x \in R/\ 2 \leq x < 5\} = [2,5[$ Abierto por la derecha.



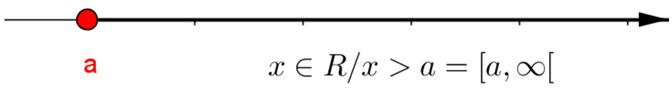
b. $\{x \in R/ -4 < x \leq 2\}$
$\{x \in R/ -4 < x \leq 2\} =]-4,2]$Abierto por la izquierda.



c. $\{x \in R/\ 4 \leq x < 9\}$
$\{x \in R/\ 4 \leq x < 9\} = [4,9[$ Abierto por la derecha.



b. Representa en la recta numérica al conjunto de números "x" tales que $x > a$. Luego escríbelo en notación de intervalo.



$$x \in R/x > a = [a, \infty[$$

PARA DESARROLLAR

Observa el conjunto de números y sus respuestas.

El conjunto de números que cumple simultáneamente $x > -1$ y $x < 3$ es $[0,1,2]$

Justifica si la respuesta es válida o no.

IDEA IMPORTANTE

En función de la longitud del intervalo este puede ser finito o infinito.

1.4 Intervalo finito y al infinito

A un intervalo con extremos a y b se le llama finito, si se utilizan los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ como determinantes de uno de sus extremos se llama infinito. Los intervalos pueden ser infinitos a la izquierda y derecha.

El intervalo $]-\infty, b[$ está formado por los números reales menores que "b". El numero "b" puede estar incluido o no según tenga un corchete cerrado o abierto.

$$\{x \in \mathbb{R} \,/\, -\infty < x < b\}$$

El intervalo $[a, +\infty[$ está formado por todos los números reales mayores que "a". El número "a" puede estar incluido o no según contenga un corchete cerrado o abierto respectivamente.

$$\{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < +\infty\}$$

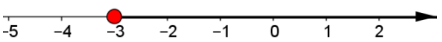
El intervalo $]-\infty, +\infty[$ contiene todos los Números Reales, por lo que es equivalente a todos los Números Reales. $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

$$\{x \in \mathbb{R} \,/\, -\infty < x < +\infty\}$$

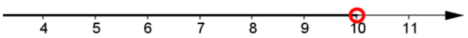
Ejemplos

1. **Escribir los intervalos que corresponden a los diagramas siguientes, en notación de intervalo y en notación de conjunto.**

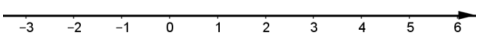
   El círculo vacío indica un extremo abierto y el lleno uno cerrado, los puntos suspensivos indican que tienden al infinito, entonces:

a.


$(-3, \infty) =]-3, \infty[= x \in R/x > -3$

b.


$x \in R/x < 10 =]-\infty, 10[$

c.


$x \in R/-\infty < x < \infty =]-\infty, \infty[$

Este intervalo tiende de menos infinito a más infinito, es decir, equivale al conjunto de los números Reales.

2. **Detalla en notación de conjuntos cada una de las proposiciones que se describe a continuación.**

   c. Conjunto de números enteros mayores o iguales a -4.
   $[-4, \infty[= \{x \in R/x \geq -4\}$

   a. Conjunto de números Reales menores que 25.
   $]-\infty, 25[= \{x \in R/x < 25\}$

   b. Conjunto de números Reales mayores que -2.
   $]-2, \infty[= \{x \in R/x > -2\}$

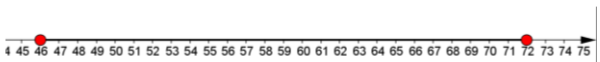
3. **Expresa cada conjunto en forma de intervalo e indica si es abierto, cerrado, semiabierto (semicerrado) o infinito.**

a.	$\{x \in \mathbb{R}/-4 \leq x < 1\}$	$[-4,1[$ semi abierto
b.	$\{x \in \mathbb{R}/x \geq 20\}$	$[20, \infty[$ semi abierto infinito
c.	$\{x \in \mathbb{R}/x \leq 25\}$	$]-\infty, 25]$ Semi abierto infinito
d.	$\{x \in \mathbb{R}/-1 \leq x < 10\}$	$[-1,10[$ Semi abierto
e.	$\{x \in \mathbb{R}/-4 \leq x\}$	$[-4, \infty[$ semi abierto Infinito
f.	$\{x \in \mathbb{R}/0 < x \leq 7\}$	$]0,7]$ Semi abierto
g.	$\{x \in \mathbb{R}/-9 < x \leq -2\}$	$]-9,2]$ Semi abierto

4. **Lee y resuelve:**
   Los resultados obtenidos por Luciana en las últimas pruebas de periodo de las diferentes materias son: 75, 54, 66, 70. 88, 92, 65, 71, 78, 80, 88, 46 y 72. Expresa las notas obtenidas como un intervalo y en notación de corchetes.

Se ordenan los datos de menor a mayor

46, 54, 65, 66, 70, 71, 72, 75, 78, 80, 88, 88, y 92



$x \in N/46 \leq x \leq 72 = [46, 72]$

	COMPLEJO EDUCATIVO CANTON TUTULTEPEQUE **GUION DE CLASE** *Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.*	*Grado: 1º año de bachillerato* *Asignatura: Matemática* *Tiempo:_______________* *Periodo: _______________*

UNIDAD 7. RESOLVAMOS DESIGUALDADES ***Objetivo de unidad:*** *Proponer soluciones a problemas relacionados con desigualdades lineales y cuadráticas representando los intervalos en la recta real, en colaboración de los demás.*	***Metodología:*** *La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.*

CONTENIDOS CONCEPTUALES	***CONTENIDOS PROCEDIMENTALES***	***CONTENIDOS ACTITUDINALES***
*2. **Operaciones con intervalos:** unión, intersección, diferencia.*	✓ *Aplicación de unión, intersección y diferencia de intervalos en la solución de ejercicios.* ✓ *Resolución de problemas utilizando los intervalos.*	✓ *Interés al resolver ejercicios y problemas con intervalos.*

Objetivo: que el alumno sea capaz de: ✓ *Aplicar la unión, intersección y diferencia de intervalos en la solución de ejercicios.* ✓ *Resolver problemas utilizando los intervalos.*	***Material de Apoyo*** • *Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio.* • *Matemática 2º año de bachillerato Santillana (pioneros)*
Indicadores de logro. ✓ *Aplica la unión, intersección y diferencia de intervalos en la solución de ejercicios.* ✓ *Resuelve problemas utilizando los intervalos.*	***Evaluación:*** *Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.* ✓ *Orden y aseo 5%* ✓ *Puntualidad 5%* ✓ *Desarrollo correcto 90%*

Actividad	Tiempo
7. Bienvenida y asistencia	
8. Presentación del contenido y objetivo de la clase	
9. Exploración de Conocimientos Previos	
10. Introducción a la temática	
11. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
12. Delegación de actividades y cierre	
Tiempo Hora Clase	

Actividad Diagnostica:
Entra al siguiente link
http://rolandotzun.wordpress.com/
Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

PARA DESARROLLAR

Los intervalos se pueden desarrollar por notación de corchetes, notación de conjunto y en forma gráfica.

Considera el tiempo que utilizas para recreación, el que permaneces haciendo deporte y el que le dedicas al estudio e indica que tipo de intervalo utilizarías para representarlo.

IDEA IMPORTANTE

El Símbolo $+\infty$ se lee "más Infinito" y $-\infty$ "menos infinito". Estos símbolos se utilizan para indicar la tendencia de crecimiento o decrecimiento.

2 Operaciones con intervalos

Dado que los intervalos representas conjuntos de números reales se pueden realizar operaciones entre ellos como unión, intersección y diferencia.

2.1 Unión

Sean A y B conjuntos. La unión de A y B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a "A" o a "B", es decir, pertenecen a uno de los dos conjuntos. Se denotan $A \cup B$. Simbólicamente se representa así: $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ò } x \in B\}$

2.2 Intersección

Sean A y B conjuntos. La intersección de A y B es el conjunto de cuyos elementos pertenecen a "A" y también a "B", es decir son comunes a ambos, se denotan $A \cap B$. Simbólicamente se representa así: $A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$

2.3 Diferencia

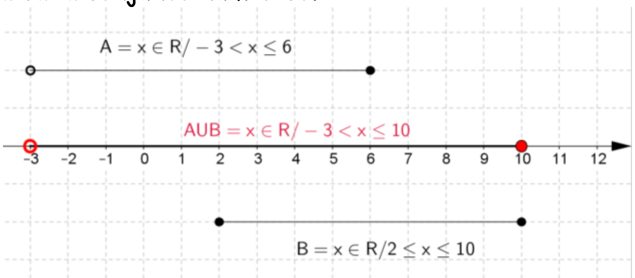
Sean A y B conjuntos las diferencias de A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a "A" y no a "B". Se denota por $A - B$.
Simbólicamente se representa así: $A - B = \{x/x \in A \text{ ò } x \notin B\}$

Ejemplos

1. Utilizar los intervalos.
$\boldsymbol{A = \{x \in \mathbb{R}/ -3 < x \leq 6\} \text{ y } B = \{x \in \mathbb{R}/ 2 \leq x \leq 10\}}$ **Y encontrar:**

a. **A ∪ B**

Para realizar operaciones con intersecciones es conveniente representar en la recta numérica cada conjunto numérico.

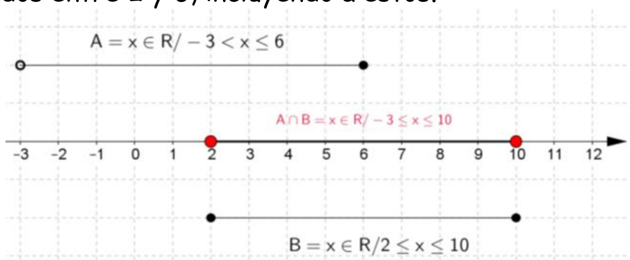


En el grafico se observa que los elementos que están en A o en B son los números Reales comprendidos entre -3 y 10.

$$\boldsymbol{A \cup B = \{x \in \mathbb{R}/ -3 < x \leq 10\}}$$

b. **A ∩ B**

Los elementos que están en A y también están en B son los números reales comprendidos entre 2 y 6, incluyendo a estos.



En el grafico se observa que los elementos que están en A y también en B son los números Reales comprendidos entre 2 y 6. Incluyendo a estos.

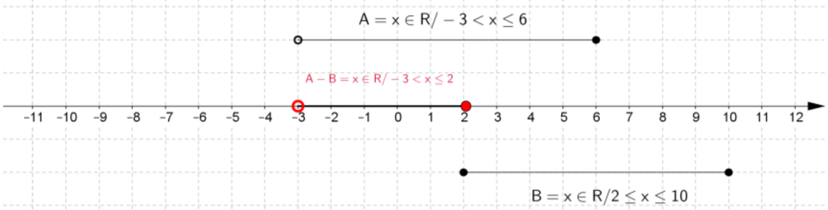
$$\boldsymbol{A \cap B = \{x \in \mathbb{R}/ 2 \leq x \leq 6\}}$$

c. **A − B**

IDEA IMPORTANTE

En función de las características de sus límites, los intervalos pueden ser abiertos, cerrados, semiabiertos o semicerrados.

Los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B son los mismos reales comprendidos entre -3 y 2.

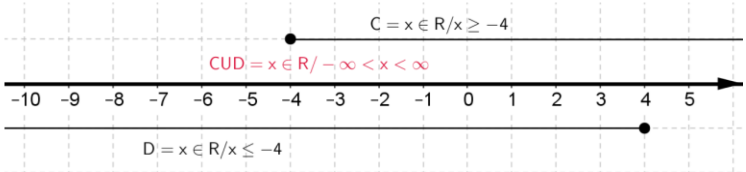


En el grafico se observa que los elementos que están en A pero no están en B son los números Reales comprendidos entre -3 y 2. Excluyendo a -3.

$$\boldsymbol{A - B} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}/ -\mathbf{3} < \boldsymbol{x} \leq \mathbf{2}\}$$

2. Utilizar los intervalos $\boldsymbol{C} = [-\mathbf{4}, +\infty[$ **y** $\boldsymbol{D} =]-\infty, \mathbf{4}]$ **y calcule:**

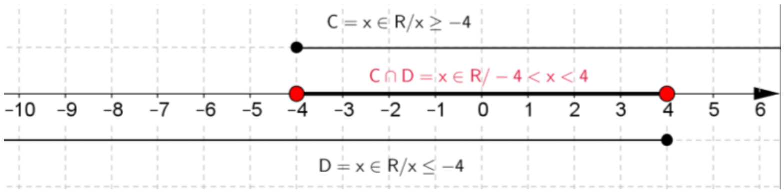
a. **C ∪ D**



Los elementos que están en C o en D son los números Reales comprendidos de $-\infty$ hasta $+\infty$

$$\boldsymbol{CUD} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}/ -\infty < \boldsymbol{x} < \infty\}$$

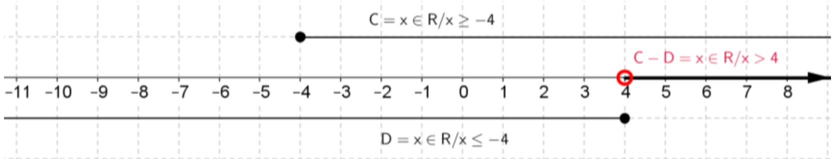
b. **C ∩ D**



Los elementos que están en C y también están en D son los números reales comprendidos entre -4 y 4, incluyendo a estos.

$$\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} / -\mathbf{4} < \boldsymbol{x} < \mathbf{4}\}$$

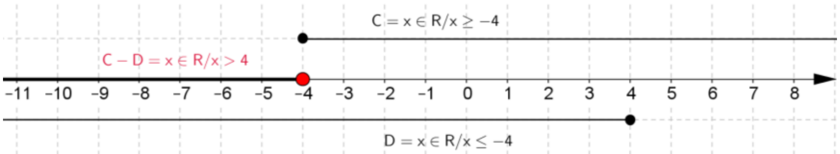
c. $\boldsymbol{C - D}$



Los elementos que perteneces a C y no pertenecen a D son los numeros comprendidos de 4 a $+\infty$

$$\boldsymbol{C - D} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} / \mathbf{4} < \boldsymbol{x} < \infty\}$$

d. $\boldsymbol{D - C}$



Los elementos que pertenecen a D y no a C son los números comprendidos de $-\infty$ a -4.

$$\boldsymbol{D - C} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} / -\infty < \boldsymbol{x} < -\mathbf{4}\}$$

2.4 Resolución de problemas con intervalos

PARA DESARROLLAR

En El Salvador, la zona oriental es una de las que experimenta mayor grado de calor. Investiga la variación de temperatura de tu ciudad y exprésala como un intervalo cerrado. Comparte la información con otros compañeros.

IDEA IMPORTANTE

Para convertir grados centígrados a Fahrenheit se utiliza

$$\frac{C}{5} = \frac{(F-32)}{9}$$

Muchas situaciones de la vida real se resuelven con la ocupación de intervalos, los problemas planteados se resuelven siguiendo los mismos pasos planteados en la resolución de problemas con ecuaciones. Es decir: Interpretación del enunciado, buen planteamiento de una expresión que contenga los signos $<, >$, la resolución de la expresión planteada y la comprobación.

1. Resolver los siguientes problemas

a. Una mañana, Rafael escucho por la radio que en ese momento la temperatura era de 27°C y que durante el día no variaría más de 5°C. Expresar con un intervalo en notación de corchetes el conjunto de valores que podría haber tomado la temperatura durante ese día.

Como la temperatura inicial puede variar $\pm 5ºC$, los valores extremos se tienen sumando y restando la variación a 27°C, así:

$27ºC - 5ºC = 22ºC$ $\qquad$ $27ºC + 5ºC = 32ºC$

El intervalo de valores de la temperatura es $[22ºC, 32ºC]$

b. Una empresa está reclutando personal para ampliar su departamento de producción, por lo cual presenta un anuncio en los diarios de mayor circulación que se lee: se necesita hombre de entre 20 y 45 años. Con estatura entre 1.65 m y 1.90 m Expresar dicha información como intervalo de notación de conjunto.

Se toman los valores extremos de la edad y estatura y se escriben como intervalos.
Edad de los candidatos $\{ x \in \mathbb{R} \,/\, 20 \text{ años} \leq x \leq 45 \text{ años}\}$
Estatura de candidatos $\{ x \in \mathbb{R} \,/\, 1.65\, m \leq x \leq 1.90\, m \}$

c. El preparador físico de la selección del colegio indica que el índice de masa corporal de una persona que come tres veces al día está entre 18.5 y 24.9 lo que indica que es saludable. Expresar dichos valores en intervalo de notación de corchetes.

Como el valor de los extremos ya está fijo, se escriben en notación de corchetes, así: $[18.5, 24.9]$

d. La temperatura de cierta ciudad del oriente del Pais oscila entre los 27°C y 35°C. si se usara la escala de Fahrenheit ¿Entre que grados oscilaría la temperatura de dichas ciudades?
Cada extremo de temperatura se expresa en grados Fahrenheit con la expresión:

$ºF = \frac{9}{2}(27) + 32 = 48.6 + 32 = 80.6$ $\qquad$ $ºF = \frac{9}{2}(35) + 32 = 63 + 32 = 95$

El intervalo de la temperatura Fahrenheit es $[80.6, 95]$

2. Leer y resolver.
Luis tiene 40 cajas de chocolate para vender. Puede venderlas a cualquier precio entre \$2 y \$5. Escribe, en forma de intervalo, cuánto dinero podría ganar Luis, según los precios sugeridos.

De acuerdo con los precios sugeridos se tiene: $40 * \$2 = \$80$ y $40 * \$5 = \$200$. El intervalo es $[80, 200]$. Luis puede ganar entre \$80 y \$200.

PARA DESARROLLAR

En un anuncio se lee:

Conductor.
Se necesita para compañía multinacional. No menor de 35 años.

Experiencia entre 5 y 10 años.

Expresa los límites de la experiencia y la edad como un intervalo.

3. **Resuelve.**
El Gerente de una empresa hace un estudio sobre el incremento de salario que brindara a sus empleados debido al cumplimiento de metas. Los salarios actuales son \$325 el mínimo y \$460 el máximo, y el aumento será del 16%. Escribe en un intervalo en notación de conjunto el rango de los nuevos salarios.

Nuevo salario Mínimo: $\$325 + (0.16)(\$325) = \$377$
Nuevo Salario Máximo: $\$460 + (0{,}16)(\$460) = \$533.6$

El intervalo de los nuevos salarios será $[\$377, \$533.6]$

	COMPLEJO EDUCATIVO CANTON TUTULTEPEQUE **GUION DE CLASE** *Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.*	*Grado: 1º año de bachillerato* *Asignatura: Matemática* *Tiempo:_______________* *Periodo: _______________*

UNIDAD 7. RESOLVAMOS DESIGUALDADES ***Objetivo de unidad:*** *Proponer soluciones a problemas relacionados con desigualdades lineales y cuadráticas representando los intervalos en la recta real, en colaboración de los demás.*	***Metodología:*** *La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.*

CONTENIDOS CONCEPTUALES	***CONTENIDOS PROCEDIMENTALES***	***CONTENIDOS ACTITUDINALES***
3.1 Propiedades de orden ✓ *Si a > b y b > c, entonces a > c* ✓ *Si a > b, entonces a + c > b + c* ✓ *Si a > b y c > 0, entonces ac > bc* ✓ *Si a > b y c < 0, entonces ac < bc*	✓ *Utilización de las propiedades de orden al solucionar ejercicios sobre desigualdades.* ✓ *Resolución de problemas utilizando las desigualdades y sus propiedades.*	✓ *Utiliza con seguridad las propiedades de orden de las desigualdades, al resolver ejercicios y problemas.*
3. Desigualdades lineales con una variable.	✓ *Graficación, sobre la recta numérica, de desigualdades lineales con una variable.* ✓ *Resolución de ejercicios y/o problemas utilizando desigualdades lineales con una variable.*	✓ *Orden y aseo en el trazo de gráficas de desigualdades lineales.* ✓ *Seguridad al resolver ejercicios y/o problemas utilizando desigualdades lineales con una variable.*
4. Desigualdades cuadráticas con una variable.	✓ *Graficación sobre la recta numérica, de desigualdades cuadráticas con una variable.* ✓ *Resolución de ejercicios y/o problemas utilizando desigualdades cuadráticas con una variable.*	✓ *Orden y limpieza al graficar la las desigualdades cuadráticas.* ✓ *Seguridad al utilizar desigualdades cuadráticas.*

Objetivo: *que el alumno sea capaz de:* ✓ *Utilizar las propiedades de orden al solucionar ejercicios sobre desigualdades.* ✓ *Resolver problemas utilizando las desigualdades y sus propiedades.* ✓ *Graficar, sobre la recta numérica, de desigualdades lineales con una variable.* ✓ *Resolver ejercicios y/o problemas utilizando desigualdades lineales con una variable.* ✓ *Graficar sobre la recta numérica, de desigualdades cuadráticas con una variable.* ✓ *Resolver ejercicios y/o problemas utilizando desigualdades cuadráticas con una variable.*	***Material de Apoyo*** • *Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio.* • *Matemática 2º año de bachillerato Santillana (pioneros)*
Indicadores de logro. ✓ *Utiliza las propiedades de orden al solucionar ejercicios sobre desigualdades.* ✓ *Resolver problemas utilizando las desigualdades y sus propiedades.* ✓ *Graficar, sobre la recta numérica, de desigualdades lineales con una variable.* ✓ *Resolución de ejercicios y/o problemas utilizando desigualdades lineales con una variable.* ✓ *Graficar sobre la recta numérica, de desigualdades cuadráticas con una variable.* ✓ *Resolver ejercicios y/o problemas utilizando desigualdades cuadráticas con una variable.*	***Evaluación:*** *Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.* ✓ *Orden y aseo 5%* ✓ *Puntualidad 5%* ✓ *Desarrollo correcto 90%*

Actividad	*Tiempo*
13. Bienvenida y asistencia	
14. Presentación del contenido y objetivo de la clase	
15. Exploración de Conocimientos Previos	
16. Introducción a la temática	
17. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
18. Delegación de actividades y cierre	
Tiempo Hora Clase	

Actividad Diagnostica:
Entra al siguiente link
http://rolandotzun.wordpress.com/
Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

PARA DESARROLLAR

Contesta la siguiente interrogante: un intervalo cuyos extremos tienden a $-\infty$ o a $+\infty$, ¿debe considerarse abierto o cerrado?

IDEA IMPORTANTE

Inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas, donde al menos alguna de ellas involucra variables.

3. Desigualdades

Una desigualdad es una expresión que simboliza una relación matemática de orden entre dos cantidades. Por ejemplo: expresiones como $5 + 2 < 11$ y $7 > 13 - 9$ son desigualdades numéricas.

Una inecuación es una desigualdad que se compone de dos expresiones algebraicas separadas por los signos $<, >, \leq$ o $\geq$

La solución de una inecuación esta formada por todos los valores que hacen que la desigualdad sea cierta.

Los valores que satisfacen una desigualdad pueden pertenecer al conjunto de los números reales. Por ejemplo, la desigualdad $x > 0$ es válida para todos los números reales positivos.

La representación gráfica de la desigualdad $x > 0$ es, por consiguiente, toda la parte positiva de la recta numérica, sin incluir el cero.

Cuando las desigualdades involucran una variable se denominan desigualdades literales o algebraicas. En este caso, estas serán verdaderas para determinados valores de la incógnita correspondiente. Así, puede haber uno, ninguno, o varios infinitos valores que satisfagan la desigualdad.

3.1 Elementos de una desigualdad.

Al igual que una ecuación, las desigualdades tienen dos miembros, separados por el signo de origen de la desigualdad. Por ejemplo:
En la expresión: $4x - 6 > 2x + 4$
$2x - 6$ Es el primer miembro y $2x + 4$ el segundo.

El grado de una desigualdad con una sola incógnita es el mayor exponente de dicha incógnita.

El conjunto solución está formado por todos los valores de la incógnita que hacen que la desigualdad sea verdadera. Al resolver el ejemplo anterior se tiene: $x > 5$

3.2. Propiedades de las desigualdades

Las desigualdades cumplen las siguientes propiedades:

Propiedad aditiva en R
Si se suma un mismo número a ambos miembros de una desigualdad, esta se conserva. Es decir si $x > y$ además existe un numero "z", entonces se cumple que $x + z > y + z$

Por ejemplo al sumar 6 a los dos miembros de la desigualdad 5< 9 la desigualdad se conserva ya que: $5 + 6 < 9 + 6 \Rightarrow 11 < 15$

IDEA IMPORTANTE

Si $a < b$ y $z \in R^+$
Entonces, $\frac{a}{z} < \frac{b}{z}$

Si $a < b$ y $z \in R^-$
Entonces, $\frac{a}{z} > \frac{b}{z}$

Propiedad multiplicativa en R^+
Si se multiplica por un número positivo a ambos miembros de una desigualdad esta se conserva. Es decir si $x > y$ además existe un numero "z", entonces se cumple que $x * z > y * z$

Por ejemplo al multiplicar por 4 los dos miembros de la desigualdad $8 > 3$ se conserva, ya que $8 * 4 > 3 * 4 \Longrightarrow 32 > 12$

Propiedad multiplicativa en R^-
Si se multiplica por un mismo número negativos a los dos miembros de una desigualdad esta cambia de sentido. Es decir si tenemos que $x > y$ además existe un numero "z" donde $z < 0$, entonces se cumple que $x * z < y * z$

Propiedad transitiva.
Si $x < y$ y $y < z$ entonces $x < z$
Si $4 < 10$ y $10 < 17$ entonces $4 < 17$

Ejemplos

1. Determinar la relación de orden entre cada par de expresiones, teniendo en cuenta las propiedades de las desigualdades.

   a. Si $x < y$, entonces $x + 3 < y + 3$; Propiedad aditiva
   b. Si $m > n$, entonces $m - 4 > n - 4$; Propiedad Aditiva
   c. Sí $p < q$, entonces $10p < 10\,q$; Propiedad Multiplicativa en R^+
   d. Sí $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$; Propiedad transitiva

2. Plantear los enunciados como desigualdades

   a. El consumo de azucares (A) y grasa (G) no debe ser mayor de 850 gramos.
   $$A + G \leq 850$$

   b. Juan (J) gana menos de $375.00 al mes
   $$J < \$375.00$$

   c. Teresa (T) tiene más de 50 años.
   $$T > 50 \text{ años}$$

3. Dada la siguiente desigualdad $-11 < -3$. Realizar lo que se indica:
   a. Sumarle 10 a cada miembro: $-11 + 10 < -3 + 10 \Rightarrow -1 < 7$
   b. Restarle -4 a ambos lados: $-11 - 4 < -3 - 4 \Rightarrow -15 < -7$
   c. Multiplicar ambos miembros por 3: $-11 * 3 < -3 * 3 \Rightarrow -33 < -9$

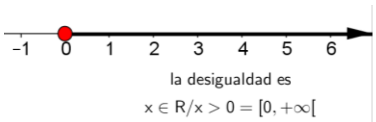
4. Indicar la propiedad que justifica cada proposición.

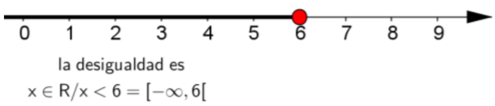
   a. Si $-2 < 4$, entonces $-4 < 2$
   Propiedad multiplicativa en R^-

   b. Como $-5 < 6$, entonces $5 > -6$
   Propiedad multiplicativa en R^-

   c. Si $-3 < -2$ y $-2 < 4$ entonces $-3 < 4$
   Propiedad transitiva.

5. Escribir una desigualdad que represente el intervalo dado en las rectas numéricas.





6. Escribir dos inecuaciones que tengan como solución x=0
   a. $x - 1 \geq -1$
   b. $x - 3 \leq -3$

7. En el desarrollo de la desigualdad señalar la propiedad que se ha ido aplicando.

$2x + 15 > -10$	
$2x + 15 - 15 > -10 - 15$	Propiedad aditiva.
$2x > -25$	Propiedad multiplicativa.
$\frac{2x}{2} > \frac{-25}{2}$	
$x > -{}^{25}/_{2}$	Se simplifica.

8. Indicar la primera propiedad que se debe aplicar para encontrar el conjunto solución de la desigualdad.

   a. $x - 10 > -4$ Propiedad Aditiva.
   b. $5x < 5$ propiedad multiplicativa en R^+

9. determinar cuáles de estas expresiones algebraicas son inecuaciones.
   a. $x - 1 = 0$ No es una Inecuación.

   b. $5x^2 + x - 6 \geq x - 4$ Es una inecuación con una incógnita de grado 2.

   c. $5x + y - 6 \leq -4$ Es una inecuación con dos incógnitas.

   d. $x^3 + 4 > 5$ Es una inecuación con una incógnita de grado 3.

   e. $\sqrt{x+4} = 3$ No es inecuación.

10. Determinar si $x = -1$ y $x = 6$ son soluciones de estas inecuaciones.

   a. $x + 2 < 5$
   - $(-1) + 2 < 5 \Rightarrow 1 < 5$ -1 es solución
   - $(6) + 2 < 5 \Rightarrow 8 < 5$ 6 no es Solución.

   b. $x - 3 \geq 2$
   - $(-1) - 3 \geq 2 \Rightarrow -4 \geq 2$ -1 no es solución
   - $(6) - 3 \geq 2 \Rightarrow 3 \geq 2$ 6 si es Solución.

   c. $2x + 5 < -4$
   - $2(-1) + 5 < -4 \Rightarrow 3 < -4$ -1 no es solución.
   - $2(6) + 5 < -4 \Rightarrow 17 < -4$ 6 no es solución.

11. Transformar cada inecuación, realizando la operación que se indica.

   a. Sumar 2 a $4x < 3$
   $4x + 2 < 3 + 2$ Se operan términos semejantes.
   $4x + 2 < 5$ Se operan términos semejantes.

   b. Restar 5 a $x - 4 > 3x - 2$
   $x - 4 - 5 > 3x + 2 - 5$ Se resta 5 a cada miembro.
   $x - 9 > 3x + 2 - 3$ Se operan términos semejantes.

   c. Multiplicar $2x + 1 \leq 3x - 2$ por 4
   $4(2x + 1) \leq 4(3x - 2)$ se multiplica por miembro.
   $8x + 4 \leq 12x - 8$

   d. Dividir $9x + 6 \geq x$ entre -3
   $\frac{9x}{-3} + \frac{6}{-3} \geq \frac{x}{-3}$ Se divide por tres
   $-3x - 2 \leq \frac{x}{-3}$ Se simplifica e invierte el símbolo.

12. Determina tres soluciones en cada caso:
   a. $x - 4 \leq 3$
   b. $x^2 + 1 \geq 1$
   c. $2x - 4 < -1$
   d. $2x + 2 > 0$
   e. $\frac{x}{2} + 2 < -2$
   f. $\sqrt{x} + 5 > 3$

13. Escribe una inecuación cuya solución sea el intervalo:
   a. $[2, +\infty[$
   b. $]-\infty, 0]$
   c. $[1, 5]$

14. Asociar cada enunciado a su correspondiente desigualdad.
   a. 1 es menor que 5. $2 > -4$
   b. 2 es mayor que 4. $5 > 3$
   c. -13 es menor que -2. $1 < 5$
   d. -4 es mayor que -7. $-14 < 6$
   e. 5 es mayor que 3. $-4 > -7$
   f. -14 es menor que 6. $-13 < -2$

15. Expresar en el cuaderno cada enunciado como inecuación, intervalo y gráficamente.

   a. Números mayores que 9 e iguales o menores que 4
   b. Números menores o iguales que 10
   c. Numero mayores que -3 y menores que 3
   d. Números mayores o iguales a -6
   e. Números menores que -5 y mayores que -10
   f. Números mayores que -8 y menores o guales que 0
   g. Los años que tiene una persona mayor de edad

16. Completa, para x=2, con el signo $<, >, \leq, \geq$ que corresponda.
   a. 2x ______3
   b. -2x _____3
   c. 2x_____-3
   d. -2x_____-3
   e. 2_____-3x
   f. -2____-3x
   g. 4x____1
   h. -4x_____-1

3.3 Resolución de problemas con desigualdades lineales.

PARA DESARROLLAR

Resuelve

$2x + 1 < 6$

Observa el proceso utilizado y di si no tiene errores. Si los hay indícalo y resuelve correctamente.

IDEA IMPORTANTE

En función de su longitud los intervalos pueden ser finitos e infinitos.

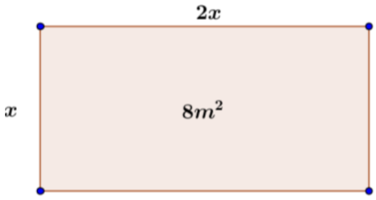
Una aplicación importante de las desigualdades es la resolución de problemas de la vida cotidiana. Para ello se siguen los mismos pasos descritos en la resolución de un problema con ecuaciones, es decir:

Interpretación del enunciado, planteamiento y resolución de desigualdades, comprobación de la solución.

Ejemplos

1. Plantear una desigualdad para cada problema.

a. La longitud de un cuadrado de pintura es el doble que su ancho y su área no sobrepasa los $8m^2$.
La desigualdad que representa el enunciado del problema es:

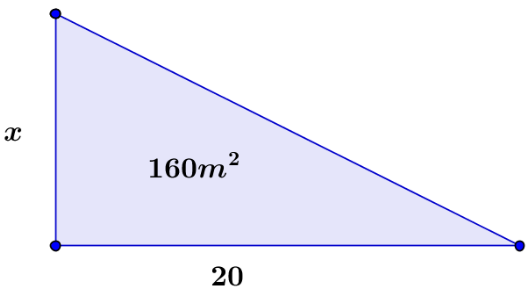


$0 < b * h \leq A$ Desigualdad

$0 < x * 2x \leq 8$

$0 < 2x^2 \leq 8$

b. Si el área de un triángulo rectángulo es menor que $160m^2$ y la base mide 20 m. ¿Qué valores puede tomar la altura?



$0 < \frac{b*h}{2} \leq A$ Desigualdad

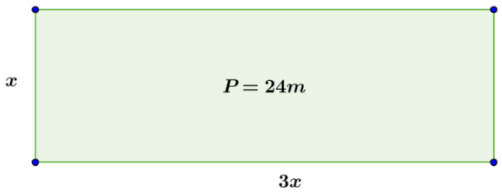
$0 < \frac{20 * x}{2} \leq 160$

$0 < 10x \leq 160$

$\frac{0}{10} < \frac{10x}{10} \leq \frac{160}{10}$

$0 < x \leq 16$

c. El largo de un rectángulo es tres veces el ancho, y el perímetro es menor a 24 metros.



Desigualdades.
$0 < x + x + 2x + 2x \leq 24$
$0 < 6x \leq 24$
$0 < x \leq 4$

2. Lee y resuelve.
En una revista de problemas de ingenio apareció el siguiente desafío de edades: Camila, Rafael y Violeta son primos. Rafael tiene 15 años y Camila tiene tres más que violeta. La suma de los años de Camila y violeta no alcanza a igualar la edad de Rafael. Escribe una inecuación que explique el problema ¿Cuántos años tiene violeta si su edad es un número impar?

IDEA IMPORTANTE

En una inecuación con una incógnita, cualquier número real que pertenece al dominio y que satisface la desigualdad en una solución de la inecuación.

4. Desigualdades Lineales con una variable.

Las desigualdades que contienen una sola variable y su mayor exponente es uno se llaman desigualdades lineales con una variable. Por ejemplo $x + 3 > 5 + 4x$ y $-4 \leq 7x + 3y$ son desigualdades lineales.

El proceso General para resolver desigualdades es similar al que se utiliza para resolver ecuaciones. Se simplifican las expresiones que se obtienen tomando en cuenta las propiedades de las desigualdades.

Resolver una desigualdad significa hallar los números que la hacen verdadera. A estos números se les llama soluciones de la desigualdad y se dice que satisfacen a dicha desigualdad.

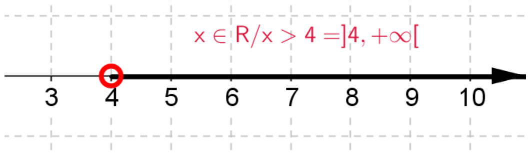
Ejemplos

1. Resolver las siguientes desigualdades, escribe la solución en forma de intervalo y graficarlas en la recta numérica.

a. $\mathbf{4x - 6 > 10}$

$\rightarrow\ 4x - 6 + 6 > 10 + 6$	Se suma 6 a ambos miembros.
$\rightarrow\ 4x > 16$	Se reducen términos semejantes.
$\rightarrow\ \frac{4x}{4} > \frac{16}{4}$	Se multiplica por $\frac{1}{4}$ a ambos miembros.
$\rightarrow\ x > 4$	Se simplifica.

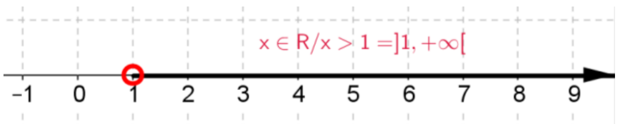
El conjunto solución $]4, +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x > 4\}$, se lee: conjunto de todas las "x" que pertenecen al conjunto de los números reales mayores que 4. En la forma gráfica se tiene:



b. $\mathbf{4(x - 1) < 3(2x - 2)}$

$\rightarrow\ 4x - 4 < 6x - 6$	Se efectúa el producto indicado
$\rightarrow\ 4x - 4 + 4 < 6x - 6 + 4$	se suma 4 a cada miembro.
$\rightarrow\ 4x < 6x - 2$	se reducen términos.
$\rightarrow\ 4x - 6x < 6x - 2 - 6x$	se suma -6x a cada miembro
$\rightarrow\ -2x < -2$	se reducen términos.
$\rightarrow\ \frac{-2x}{-2} < \frac{-2}{-2}$	se divide por -2 cada miembro
$\rightarrow\ x > 1$	se simplifica.

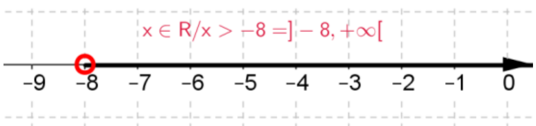
El conjunto solución $]1, +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x > 1\}$, se lee: conjunto de todas las "x" que pertenecen al conjunto de los números reales mayores que 1. En la forma gráfica se tiene:



c. $\mathbf{-3x + 4x + 7 > -1}$

$\rightarrow\ -3x + 4x + 7 - 7 > -1 - 7$	Se suma -7 a cada miembro.
$\rightarrow\ x > -8$	Se reducen términos.

El conjunto solución $]-8, +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} /\ x > -8\}$, se lee: conjunto de todas las "x" que pertenecen al conjunto de los números reales mayores que -8. En la forma gráfica se tiene:

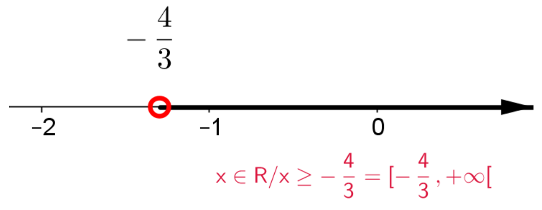


PARA DESARROLLAR

Observa la desigualdad $x < 3$, escribe tres situaciones de la vida real que puedan expresarse con esta desigualdad. Por ejemplo: la cantidad de lapiceros que poseo es menor que tres.

d. $3x - 4 \geq 6x$

$\rightarrow\ 3x - 4 + 4 \geq 6x + 4$	Se suma 4 a cada miembro
$\rightarrow\ 3x \geq 6x + 4$	Se reducen términos semejantes.
$\rightarrow\ 3x - 6x \geq 6x + 4 - 6x$	Se suma -6x a cada miembro.
$\rightarrow\ -3x \geq 4$	Se reducen términos.
$\rightarrow\ \frac{-3x}{-3} \geq \frac{4}{-3}$	Se divide por -3 cada miembro.
$\rightarrow\ x \leq -\frac{4}{3}$	Se simplifica e invierte la igualdad.



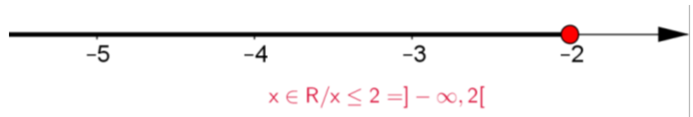
IDEA IMPORTANTE

Si dos o más desigualdades tienen exactamente el mismo conjunto solución se dice que dichas desigualdades son equivalentes.

2. Resolver las desigualdades completando las operaciones.
Como la desigualdad tiene términos en el denominador se puede convertir en una desigualdad lineal si se multiplican ambos miembros por el mcm de los denominadores.

$$\frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{x-4}} \leq \frac{\mathbf{-3}}{\boldsymbol{2x-3}}$$

$\rightarrow\ 6(2x-3) \leq -3(x-4)$	se multiplica en cruz.
$\rightarrow\ 12x - 18 \leq -3x + 12$	se efectúan los productos indicados
$\rightarrow\ 12x - 18 + 18 \leq -3x + 12 + 18$	se suma 18 a ambos miembros
$\rightarrow\ 12x \leq -3x + 30$	se reducen términos
$\rightarrow\ 12x + 3x \leq -3x + 30 + 3x$	se suma 30x a ambos miembros.
$\rightarrow\ 15x \leq 30$	se reducen términos
$\rightarrow\ \frac{15x}{15} \leq \frac{30}{15}$	se divide por 15 ambos miembros.
$\rightarrow\ x \leq 2$	se reducen términos y se simplifica.



3. Indica si el conjunto solución propuesto satisface la desigualdad. Justifica tu respuesta:

a. $\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} \leq -1 \quad sol.\, x \leq 7$

$\rightarrow\ (x-1) - 3(x-3) \leq 6(-1)$
$\rightarrow\ x - 1 - 3x + 9 \leq -6$
$\rightarrow\ -2x + 8 \leq -6$
$\rightarrow\ -2x + 8 - 8 \leq -6 - 8$
$\rightarrow\ -2x \leq -14$
$\rightarrow\ \frac{-2x}{-2} \leq \frac{-14}{-2}$
$\rightarrow\ x \geq 7$

b. $\frac{x}{4} - \frac{x+4}{6} \leq \frac{x-8}{12} \quad sol.\, x \leq 5$

$\rightarrow\ 3(x) - 2(x+4) \leq x - 8)$
$\rightarrow\ 3x - 2x - 8 \leq x - 8$
$\rightarrow\ x - 8 \leq x - 8$
$\rightarrow\ x - 8 - x + 8 \leq x - 8 - x + 8$
$\rightarrow\ 0 \leq 0$

4. Plantea la desigualdad correspondiente y resuélvela.
Santiago tiene un terreno cuadrado de lado x-2 ¿Cuáles son los posibles valores de x si el perímetro debe ser menor o igual a 60m?

PARA DESARROLLAR

Indica si el siguiente par de inecuaciones son equivalentes, es decir, si tienen el mismo conjunto solución:

$x + x - 2 > 4$
$-2x - x + 3 > -9$

Explica con tus palabras si en la vida real pueden presentarse situaciones con desigualdades equivalentes.

IDEA IMPORTANTE

Las inecuaciones tienen aplicaciones en la producción industrial, la mercadotecnia, la administración de personal y la publicidad. Estas actividades requieren de la provisión, manejo y distribución de recursos sujetos a determinadas restricciones. Por ejemplo, se utilizan inecuaciones para expresar condiciones en las cuales se requiere conocer el valor máximo o mínimo de una variable.

4.1 Problemas con desigualdades Lineales.

Una aplicación importante de las desigualdades es la resolución de problemas de la vida cotidiana. Para ello se siguen los mismos pasos descritos en la resolución de problemas con ecuaciones. Es decir:

- Interpretación del resultado.
- Planteamiento del problema.
- Resolución de la desigualdad.
- Comprobación de la solución.

Ejemplos

1. Resolver los siguientes problemas.

c. Un canal de riego es alimentado por tres fuentes A, B y C. La fuente A surte 1000 litros de agua por segundo y las otras diferentes cantidades por segundo. La fuente B surte tres veces la cantidad que surte la fuente C. Si el canal está diseñado para transportar como máximo 4600 litros por segundo ¿Qué cantidad máxima deben surtir las fuentes B y C?

Interpretación del enunciado

Se asigna “x” a la cantidad de agua que surte la fuente C por segundo.
Por tanto:
Cantidad de agua que surte la fuente C por segundo: x
Cantidad de agua que surte la fuente B por segundo: 3x

Planteamiento y resolución de la desigualdad.

Como la cantidad de agua máxima que transporta el canal es 4600 litros por segundo. La suma de las cantidades de agua que surten las tres fuentes debe ser menor o igual a 4600; por lo tanto:

$\rightarrow \; x + 3x + 1000 \leq 4600$
$\rightarrow \; 4x + 1000 \leq 4600$
$\rightarrow \; 4x + 1000 - 1000 \leq 4600 - 1000$
$\rightarrow \; 4x \leq 3600$
$\rightarrow \; \frac{1}{4} * 4x \leq \frac{1}{4} * 3600$
$\rightarrow \; x \leq 900$

La fuente C surte como mínimo 900 litros por segundo y la fuente B surte como máximo 2700 litros por segundo.

Comprobación de la solución:

$1000 + 900 + 2700 = 4600$ lo cual verifica que las cantidades máximas que surten las tres fuentes suman 4600 litros por segundo. Por lo tanto la solución es correcta.

IDEA IMPORTANTE

Un paréntesis precedido de un signo menos afecta a los signos de todos los elementos dentro de el.

$-4(x-6) = -4x + 24$

b. Un fabricante de camisa vende cada unidad producida a $18. Si el costo de la materia prima por camisa es de $7 y los costos fijos de fabricación quincenal son de $3025 ¿Cuántas camisas quincenales debe fabricar y vender para obtener utilidad?

1. Interpretación del resultado.
2. Planteamiento y solución de la desigualdad.
3. Comprobación de la solución.

5. desigualdades cuadráticas con una variable.

Las desigualdades en una variable son desigualdades que tiene una sola variable, cuyo máximo exponente es dos. Ejemplo:

$3x^2 - 2x + 5 > 0$ $\qquad x^2 - 2x < 8$ $\qquad x^2 - x + 2 > 0$

Son desigualdades cuadráticas

En general, una expresión de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c > 0$ Donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$ son desigualdades cuadráticas.

La resolución de una desigualdad cuadrática con una variable requiere de los siguientes pasos:

1. Se trasladan todos los términos de la desigualdad a un solo miembro, de manera que en el otro quede 0
2. Se factoriza el polinomio de segundo grado y se determinan los números criticas x_1 y x_2
3. Se determinan los intervalos en los que los puntos críticos dividen la recta numérica y se construye una tabla con dicha información.
4. Se elige un número de prueba para analizar los signos de los factores en la expresión y determinar el signo del producto.
5. De acuerdo con el designo de la desigualdad se determina que valores son soluciones de la misma.

PARA DESARROLLAR

Comenta con tus compañeros las diferentes formas que se pueden utilizar para resolver una ecuación de segundo grado

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

IDEA IMPORTANTE

Un número crítico es una raíz real de una ecuación cuadrática.

Un número de prueba es uno que pertenece a los intervalos que se forman a partir de los números críticos.

Ejemplos

1. Resolver la desigualdad y expresar el conjunto solución usando notación de intervalo.

a. $\boldsymbol{x^2 - 8 \geq -2x}$

- Se aplican las propiedades de las desigualdades para escribir todos los términos diferentes de cero en un miembro de la desigualdad.

$$x^2 - 8 + 2x \geq -2x + 2x$$
$$x^2 - 8 + 2x \geq 0$$

- Se factoriza el trinomio:
$x^2 + 2x - 8 \geq 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 2) \geq 0$

  Los números críticos son $x_1 = -4$ y $x_2 = 2$, estos dividen a la recta numérica en tres intervalos: los números menores que -4, los números comprendidos entre -4 y 2, y los mayores que 2.

- Se construye un cuadro de variación que contenga los números críticos, los intervalos que estos generan y los factores del polinomio.
Para cada intervalo se toma un número de prueba y se sustituye en cada factor para determinar el signo correspondiente, así:

IDEA IMPORTANTE

Existen diferentes formas de presentar el conjunto solución de una desigualdad. Una de las más comunes es presentar dichos intervalos en forma de desigualdad. Así, se presenta de la forma:

$$x > a; x < b$$

Por otro lado, también es posible utilizar la notación de intervalo que utiliza paréntesis y corchetes.

Si $-4 < x < 2$. Entonces x+4 es positivo y $x - 2$ es negativo, por lo que el producto de ambos es negativo. Para $x > -4$, $x + 4$ es negativo y $x - 2$ es negativo. El producto de ambos es positivo. Para $x > 2$, $x + 4$ es positivo al igual que $x - 2$, el producto de ambos es positivo

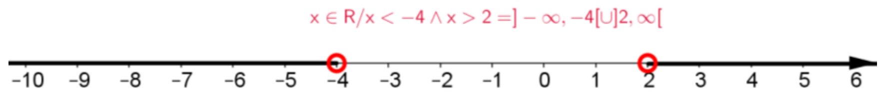
	$-\infty$ — -4	-4 — 2	2 — $+\infty$
$(x+4)$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$(x+4)\ (x-2)$	$+$	$-$	$+$

- Como la desigualdad es mayor que cero, se considera como solución los intervalos en los que el producto es positivo.

  El conjunto solución de la desigualdad $x^2 - 8 > -2x$ esta formado por los intervalos $]-\infty, -4[\cup]2, \infty[$

  La desigualdad $x^2 - 8 > -2x$ se cumple para todos los numeros reales menores que -4 y mayores que 2.

  En forma gráfica el conjunto solución se muestra a continuación.



2. Resolver la desigualdad $3 - 5x > 2x^2$

Comparar la expresión polinomial con el cero.

$-2x^2 - 5x + 3 > 0$
$2x^2 + 5x - 3 < 0$
$(x - 1)(x + 3) < 0$

$2x - 1 = 0$ $\qquad x + 3 = 0$
$2x = 1$ $\qquad x = -3$

$x = {}^{1}/_{2}$

Se determinan los intervalos y se elige cualquier valor en cada uno. Se sustituye en cada factor y se registra el signo correspondiente:

	$-\infty$ — -3	-3 — $1/2$	$1/2$ — $+\infty$
$(2x-1)$	$-$	$-$	$+$
$(x+3)$	$-$	$+$	$+$
$(-2x+1)(x+3)$	$+$	$-$	$+$

De la tabla de signos que se forma se obtiene el resultado. El producto de factores es negativo si la

3. Resuelve la desigualdad $x^2 - 2x + 35 \leq 0$

$x^2 - 2x - 35 \leq 0$
$(x - 7)(x + 5) \leq 0$

$x - 7 = 0$ $\qquad x + 5 = 0$
$x = 7$ $\qquad x = -5$

Se determinan los intervalos y se elige cualquier valor en cada uno. Se sustituye en cada factor y se registra el signo correspondiente:

	$-\infty$ — -5	-5 — 7	7 — $+\infty$
$(x-7)$	$-$	$-$	$+$
$(x+5)$	$-$	$+$	$+$
$(x-7)(x+5)$	$+$	$-$	$+$

De la tabla de signos que se forma se obtiene el resultado. El producto de factores es negativo si la variable x está en el intervalo $[-5, 7]$

PARA DESARROLLAR

Indica porque el dominio de la desigualdad: $\frac{2x+3}{x+2} \geq 0$ no incluye todos los números reales. ¿Qué números no incluye y porque?

IDEA IMPORTANTE

Los números críticos son las raíces de los polinomios involucrados, es decir, los que hacen cero a cada uno de los factores que se obtienen al factorizar dicho polinomio.

5.1 Desigualdades no lineales con una variable.

Las desigualdades no lineales son aquellas en las que el polinomio involucrado no es de grado uno, las desigualdades cuadráticas y cubicas son un caso particular de las desigualdades no lineales.

Al igual que el procedimiento para las desigualdades cuadráticas, para resolver desigualdades no lineales es necesario factorizar el polinomio correspondiente para determinar los factores. Luego, se sigue el mismo procedimiento utilizado para resolver desigualdades cuadráticas.

Ejemplos

1. Resolver la siguiente desigualdad: $(x-2)(x+5)(x+8) > 0$

La desigualdad es de grado 3 y se encuentra factorizada. Por lo que es posible determinar que los números críticos son:

$$(x-2)=0 \qquad (x+5)=0 \qquad (x+8)=0$$
$$x=2 \qquad x=-5 \qquad x=-8$$

La tabla de variación se construye tomando en cuenta los tres números críticos y un número de prueba para cada intervalo.

$-\infty$ -8 -5 2 $+\infty$

$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+5)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x+8)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)\ (x+5)\ (x+8)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Se toma como conjunto solución el intervalo cuyo producto sea positivo, es decir: $]-8,-5[\text{U}]2,\infty[$

2. Resolver la siguiente desigualdad: $x^4 - x^2 > 0$

$$x^4 - x^2 > 0$$
$$x^2(x^2-1) > 0$$
$$x^2(x-1)(x+1) > 0$$

$-\infty$ -1 0 1 $+\infty$

x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x^2(x+1)(x-1)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Se toma como conjunto solución el intervalo cuyo producto sea positivo, es decir: $]-\infty,-1[\text{U}]1,+\infty[$

IDEA IMPORTANTE

Para resolver otro tipo de desigualdades se procede de manera similar al que se emplea para las ecuaciones: la clave es factorizar y encontrar las raíces.

3. Desarrollar la inecuación $x^3 - 2x^2 - 35x \leq 0$ y expresar el conjunto solución en notación de corchetes y forma gráfica.

$x^3 - 2x^2 - 35x \leq 0$
$x(x^2 - 2x - 35) \leq 0$
$x(x-7)(x+5) \leq 0$

Se identifican los intervalos para cada número crítico y se construye la tabla de variación.

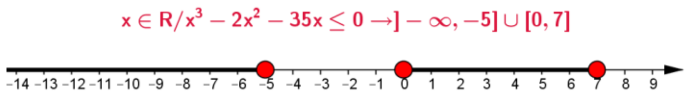
Luego se elige un numero de prueba para cada intervalo y se sustituye en cada factor para determinar si es o no solución de la igualdad.

	$-\infty$ … -5	-5 … 0	0 … 7	7 … $+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x+5)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-7)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x(x+5)(x-7)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Como la desigualdad es menos que cero, se toma como solución los intervalos que contienen signo negativo.

Y así $x^3 - 2x^2 - 35x \leq 0 \; si \; x \in \left]-\infty, -5\right] \cup [0,7]$

En forma gráfica se tiene:



4. Resolver la Inecuación $(x+3)(x-1)(x-4) < 0$

La inecuación ya está factorizada y se pueden obtener de manera inmediata los numeros críticos $x_1 = -3;\; x_2 = 1;\; x_3 = 4$

	$-\infty$ … -3	-3 … 1	1 … 4	4 … $+\infty$
$(x+3)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-4)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+3)(x-1)(x-4)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Como la inecuación es $<$ se toman los valores con signo menos: $]-\infty, -3[\, \cup \,]1, 4[$

PARA DESARROLLAR

Probar que la siguiente desigualdad es verdadera para $a = 2$ y $b = 3$.

$$a^2 - b^2 > (a-b)^2$$

Justifica tu respuesta.

IDEA IMPORTANTE

Las gráficas de polinomios de segundo grado tienen forma de parábola. Cuando el coeficiente del termino con x^2 posee signo positivo la parábola está abierta hacia arriba. Si, por el contrario, el coeficiente de x^2 tiene signo negativo, la parábola está abierta hacia abajo.

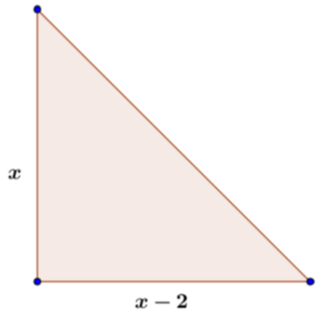
5.2 Resolución de problemas con desigualdades cuadráticas.

En la resolución de problemas que contengas desigualdades cuadráticas se siguen los mismos pasos descritos en la resolución de problemas con desigualdades lineales. Es decir, interpretación del enunciado, planteamiento de problema, resolución de desigualdad y comprobación de solución.

Ejemplos

1. Resolver los problemas.

a. Una de las caras de una figura egipcia tiene forma de triangulo rectángulo con dimensiones de x-2 de base y su altura es de x. el área de la cara debe ser menor que $4m^2$. Plantear una desigualdad que represente esta situación y determinar el intervalo de valores que podría tomar x.



$$Area = \frac{base * altura}{2}$$

$$Area = \frac{x(x-2)}{2}$$

$$Area = \frac{x^2 - 2x}{2}$$

Como la base debe ser menor que $4m^2$ se tiene:

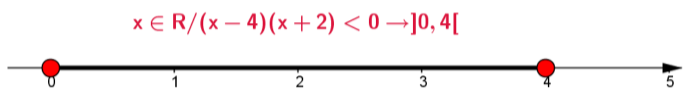
$$\frac{x^2 - 2x}{2} < 4$$

$$x^2 - 2x < 2(4)$$
$$x^2 - 2x < 8$$
$$x^2 - 2x - 8 < 0$$
$$(x-4)(x+2) < 0$$

Los números críticos son $x_1 = 4$; $x_2 = -2$

	$-\infty$ — -2	-2 — 4	4 — $+\infty$
$(x-4)$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-4)(x-2)$	$+$	$-$	$+$

Como el producto debe ser menor que cero, la solución es el intervalo $]-2,4[$. Tomando las longitudes como positivas, la solución se restringe al intervalo $]0,4[$. De forma gráfica:



b. En una pequeña empresa fabrican artículos de iluminación decorativos, los que se venden a $85 c/u. si a diario se fabrican x artículos y el importe del costo de materiales y mano de obra está dado por la ecuación $x^2 + 9x + 960$, ¿Cuántos artículos se deben fabricar cada día para obtener utilidades?

Grafica en la recta numérica el conjunto solución.

PARA DESARROLLAR

$(x-2)^2 \geq 0$ y $(x-2)^2 \leq 0$ ¿Tiene el mismo conjunto solución? Observa las desigualdades, la diferencia está en el símbolo mayor y menor que.

¿Qué estrategia se debe usar para demostrar que no tienen el mismo conjunto solución?

Explica

IDEA IMPORTANTE

Las desigualdades cuadráticas en una variable son desigualdades en las que el mayor exponente de la variable es 2.

Los ingresos vienen dados por el producto de x artículos y su costo 85x. Se representan las utilidades por "U". Se tiene:

$U = 85x - (x^2 + 9x + 960)$
$U = 85x - x^2 - 9x - 960$
$U = -x^2 + 76x - 960$

Para que la empresa tenga utilidades $U > 0$, entonces:
$-x^2 + 76x - 960 > 0$
$x^2 - 76x + 960 < 0$
$(x-16)(x-60) < 0$

	$-\infty$ 16	16 60	60 $+\infty$
$(x-60)$	$-$	$-$	$+$
$(x-16)$	$-$	$+$	$+$
$(x-16)(x-60)$	$+$	$-$	$+$

De la tabla se concluye que la desigualdad será válida para el intervalo $]16{,}60[$. Esto implica que la empresa obtendrá utilidades cuando el número de ventas sea mayor que 16 unidades y menor que 60 unidades.