UNIDAD 9
UTILICEMOS LAS FUNCIONES ALGEBRAICAS

	COMPLEJO EDUCATIVO CANTON TUTULTEPEQUE **GUION DE CLASE** Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.	Grado: 1° año de bachillerato Asignatura: Matemática Tiempo:_______________ Periodo: _______________

UNIDAD 9. UTILICEMOS LAS FUNCIONES ALGEBRAICAS **Objetivo de unidad:** Aplicar funciones algebraicas a situaciones de la cotidianidad relacionadas con la vida económica y social, al resolver problemas que requieran su aplicación.	**Metodología:** La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.

CONTENIDOS CONCEPTUALES	CONTENIDOS PROCEDIMENTALES	CONTENIDOS ACTITUDINALES
1. Funciones algebraica. 1.1 Características	Interpretación y explicación de las características de las funciones algebraicas.	Seguridad al interpretar y explicar las funciones algebraicas.

Objetivo: que el alumno sea capaz de: ✓ Interpretar y explicar las características de las funciones algebraicas.	**Material de Apoyo** • Matemática 2° año. Raúl Aguilera Liborio. • Matemática 1° año de bachillerato Santillana (pioneros)
Indicadores de logro. ✓ Interpreta y explica las características de las funciones algebraicas.	**Evaluación:** Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo. ✓ Orden y aseo 5% ✓ Puntualidad 5% ✓ Desarrollo correcto 90%

Actividad	Tiempo
1. Bienvenida y asistencia	
2. Presentación del contenido y objetivo de la clase	
3. Exploración de Conocimientos Previos	
4. Introducción a la temática	
5. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
6. Delegación de actividades y cierre	
Tiempo Hora Clase	

Actividad Diagnostica:
Entra al siguiente link
http://rolandotzun.wordpress.com/
Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

FUNCIONES ALGEBRAICAS

La función algebraica satisface una ecuación polinómica cuyos coeficientes son a su vez polinomios o monomios

PARA PENSAR

¿El conjunto de imágenes de una función coincide con el conjunto de llegada?

____

____

1. Funciones Polinómicas

Una función f: R → R de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ de donde $a_k \in R, a \neq 0 \; y \; n \in N$, Recibe el nombre de **Función Polinómica**

Una función polinómica está definida para todo número real por tanto, su dominio es R. Su rango es un subconjunto de R, que normalmente corresponde a un intervalo

Ejemplos

Determina el dominio y el de las siguientes funciones polinómica:

a. $\boldsymbol{f(x) = \frac{3x+2}{5}}$

Esta función polinómica es de grado uno $Dom\, f = R$

Al despejar x se obtiene $x = \frac{5y-2}{3}$ que corresponde a un polinomio de grado uno en la variable y así $Ran\, f \;=\; R$

b. $\boldsymbol{g(x) = x^3 + 2x^2}$

Esta es una función cubica o polinomio de grado 3 y al no poseer restricciones en la variable x se tiene que $Dom\, g(x) \;=\; R$

Al analizar la gráfica (figura 1) de la función se concluye que $ran\, g(x) = \; R$

c. Hallar el dominio y el rango de la función cuadrática $\boldsymbol{h(x) \;=\; x^2 \;+\; 5x \;+ 6}$ luego trazar la grafica

Como h(x) es una función cuadrática su representación en el plano es una parábola. Luego $Dom\, h(x) \;=\; R$ ya que x puede tomar cualquie valor de R

El rango de la función se puede hallar en forma algebraica así:

$y = x^2 + 5x + 6$

$y = x^2 + 5x + 6 \quad Ya\; que\; h(x) = Y$

$y = \; x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$ se completa el cuadrado

$$y + 6 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \;=\; x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$y - 6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \;=\; \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$ se factoriza.

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}}$$

Como $y + \frac{1}{4} \geq 0 \; si \; y \geq \frac{1}{4}$, entonces,$ran\; h(x) es\; \left[\frac{1}{4}, \infty\right[$ se analiza la cantidad subradical.

	COMPLEJO EDUCATIVO CANTON TUTULTEPEQUE **GUION DE CLASE** Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.	Grado: 1° año de bachillerato Asignatura: Matemática Tiempo:_______________ Periodo: ______________

UNIDAD 9. UTILICEMOS LAS FUNCIONES ALGEBRAICAS **Objetivo de unidad:** Aplicar funciones algebraicas a situaciones de la cotidianidad relacionadas con la vida económica y social, al resolver problemas que requieran su aplicación.	**Metodología:** La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.

CONTENIDOS CONCEPTUALES	CONTENIDOS PROCEDIMENTALES	CONTENIDOS ACTITUDINALES
2. **Funciones polinomiales:** $\boldsymbol{f(x) = axn + b}$. 2.1 Función constante: $\boldsymbol{f(x) = k}$	Graficación y explicación de una función constante. Aplicación de la función constante en la solución de ejercicios y/o problemas.	Confianza, orden y aseo al graficar una función constante. Seguridad al aplicar la función constante en la solución de ejercicios y/o problemas.
2.2 Función lineal: $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$	Determinación, Graficación y explicación de una función lineal. Aplicación de la función lineal en la solución de ejercicios y/o problemas.	Confianza, orden y aseo al graficar una función lineal. Seguridad al aplicar la función lineal en la solución de ejercicios y/o problemas.
2.3 Función cuadrática: $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$	Determinación, Graficación y explicación de una función cuadrática. Precisión, orden y limpieza al graficar una función cuadrática. Aplicación de la función cuadrática en la solución de ejercicios y/o problemas.	Seguridad al aplicar la función cuadrática en la solución de ejercicios y/o problemas.
2.4 Función cúbica: $\boldsymbol{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$.	Determinación, Graficación y explicación de una función cúbica. Resolución de ejercicios y/o problemas utilizando la función cúbica.	Precisión, orden y limpieza al graficar una función cúbica. Confianza al resolver en equipo ejercicios y/o problemas utilizando la función cúbica.

Objetivo: que el alumno sea capaz de: ✓ Graficar y explicar una función constante. ✓ Aplicar la función constante en la solución de ejercicios y/o problemas. ✓ Determinar, Graficar y explicar una función lineal. ✓ Aplicar la función lineal en la solución de ejercicios y/o problemas. ✓ Determinar, Graficar y explicar una función cuadrática. ✓ Mostrar precisión, orden y limpieza al graficar una función cuadrática. ✓ Aplicar la función cuadrática en la solución de ejercicios y/o problemas. ✓ Determinar, Graficar y explicar una función cúbica. ✓ Resolver ejercicios y/o problemas utilizando la función cúbica.	**Material de Apoyo** • Matemática 2° año. Raúl Aguilera Liborio. • Matemática 1° año de bachillerato Santillana (pioneros)

Indicadores de logro.	
✓ Gráfica y explica con orden, aseo y confianza las funciones constantes. ✓ Resuelve con seguridad ejercicios y/o problemas aplicando las funciones constantes. ✓ Determina, grafica y explica con orden, aseo y confianza las funciones lineales. ✓ Resuelve ejercicios y/o problemas aplicando las funciones lineales. ✓ Determina, grafica y explica con precisión, orden y limpieza las funciones cuadráticas. ✓ Resuelve con seguridad ejercicios y/o problemas aplicando la función cuadrática. ✓ Determina, grafica y explica con precisión, orden y limpieza las funciones cúbicas. ✓ Resuelve con confianza ejercicios y/o problemas aplicando la función cúbica. ✓ Determina, grafica y explica con precisión, orden y limpieza la función raíz cuadrada. ✓ Resuelve ejercicios y/o problemas aplicando la función raíz cuadrada y valora el trabajo en equipo. ✓ Determina y explica con seguridad la obtención de la inversa de una función. ✓ Aplica e interpreta con seguridad la función inversa. ✓ Resuelve ejercicios y/o problemas aplicando con confianza la función inversa.	**Evaluación:** Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo. ✓ Orden y aseo 5% ✓ Puntualidad 5% ✓ Desarrollo correcto 90%

Actividad	Tiempo
1. Bienvenida y asistencia	
2. Presentación del contenido y objetivo de la clase	
3. Exploración de Conocimientos Previos	
4. Introducción a la temática	
5. Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
6. Delegación de actividades y cierre	
Tiempo Hora Clase	

Actividad Diagnostica:
Entra al siguiente link
http://rolandotzun.wordpress.com/
Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

1.1 Función constante

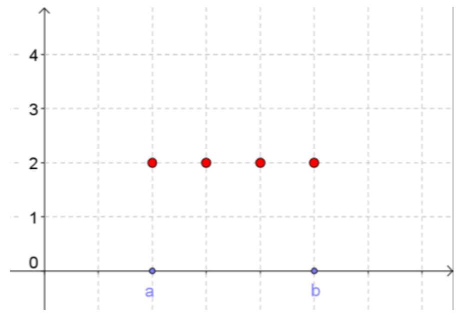
PARA DESARROLLAR

Considera la Intersección de una calle y una avenida como el origen de un sistema de coordenadas cartesianas. ¿Qué debes hacer para localizar (3,4), considerando cada cuadra como la unidad de longitud?

____
____
____
____

Toda función de la forma $f(x) = k$, donde $k \in R$, recibe el nombre de función constante.

Una función es constante cuando su representación gráfica es una recta o un segmento de recta horizontal así en la gráfica se observa que todos los números que pertenecen al intervalo $[a, b]$ tienen como imagen a 2 por tanto la función es constante en dicho intervalo



Si f es una función constante se tiene que $Dom\, f(x) = R$ y $Ran\, f(x) = \{k\}$

Ejemplos

1. Encontrar los valores para la función $f(x) = -5$
$f(0), f(2), f(-4), f(5)$

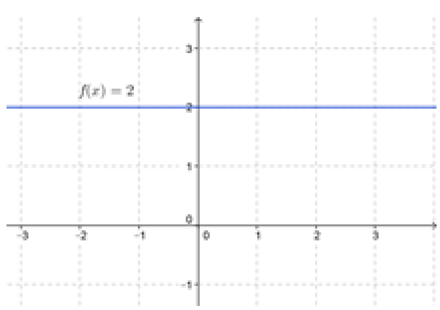
El valor de x no es posible sustituirlo en la función porque carece de la variable x por lo cual su valor no cambia

$F(0) = -5,\quad f(2) = -5,\quad f(-4) = -5,$
$f(5) = -5$

2. Construir la gráfica de $f(x) = 2$

Se construye una tabla de valores de x que pertenezcan al conjunto de las reales y las correspondientes parejas ordenadas luego se trasladan al plano cartesiano

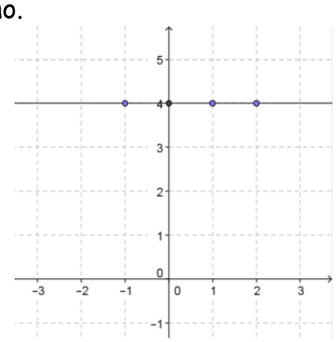
x	$f(x)$	(x, y)
-2	2	(-2,2)
-1	2	(-1,2)
0	2	(0,2)
1	2	(1,2)
2	2	(2,2)
3	2	(2,2)



3. Realizar la gráfica de las siguientes funciones. Luego determinar su Dominio y Rango.

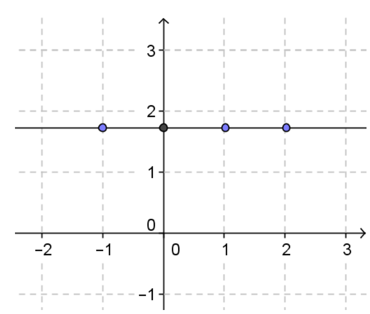
a. $f(x) = 4$
Se construye la tabla de valores y los pares obtenidos se trasladan al plano.

x	y	(x, y)
-1	4	(-1,4)
0	4	(0,4)
1	4	(1,4)
2	4	(2,4)



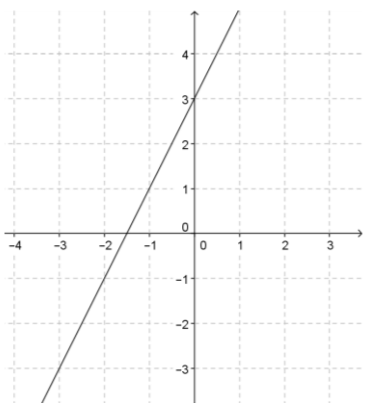
b. $f(x) = \sqrt{3}$
La función constante es 1.7 aproximadamente.
Se construye la tabla de valores y los pares obtenidos se trasladan al plano.

x	y	(x, y)
-1	1.7	(-1, 1.7)
0	1.7	(0, 1.7)
1	1.7	(1, 1.7)
2	1.7	(2, 1.7)



PARA DESARROLLAR

Comenta la importancia de una pendiente en la carretera, en el patio del colegio, en una acera o en un camino.



1.2 Función lineal

Toda función de la forma $f\,(x) = mx\ + b\,donde\,m \in R,\ b\ \in\ R\,y\,m\ \neq\ 0$ recibe el nombre de función lineal.

El valor m es la pendiente de la recta (si $m > 0$ la función es creciente y si $m < 0$ la función es decreciente) el valor b es el punto de intersección de la recta con el eje y

Si f es una función lineal entonces $Dom\,f(x) = R$ y $Ran\,f(x) = R$ Cuando en la funcion anterior $b = 0$ la funcion recibe el nombre de **función lineal**. Su grafica es una recta que pasa por el origen del plano cartesiano. En símbolos una función lineal es una función de la forma $f(x) =\ mx$ con $m\ \neq\ 0$.

Por ejemplo la función $f(x) = 2x +\ 1$ es una función lineal, su dominio $Domf(x) =\ R$ y $Ran\,f(x) =\ R$. Por otro lado $g(x) =\ 28x$ es una funcion lineal con $Dom\,g(x)\ =\ R$ y $Ran\ g(x) =\ R$

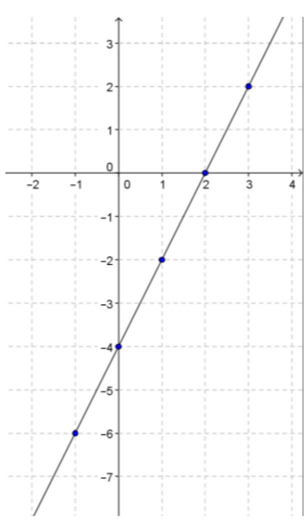
La pendiente m puede ser positiva o negativa y (0,b) son las coordenadas del punto donde la recta corta al eje de las ordenadas

Ejemplos

1. **Representar gráficamente la función** $\boldsymbol{f(x) = 2x - 4}$

Se construye la tabla de valores tomando como dominio el conjunto de los números Reales y sustituyendo f(x), luego los pares obtenidos se trasladan al plano.

x	y	(x, y)
-1	-6	(-1,-6)
0	-4	(0,-4)
1	-2	(1,-2)
2	0	(2,0)
3	2	(3,2)



La recta tiene
Pendiente m=2.
Corta al eje Y en (0,-4)

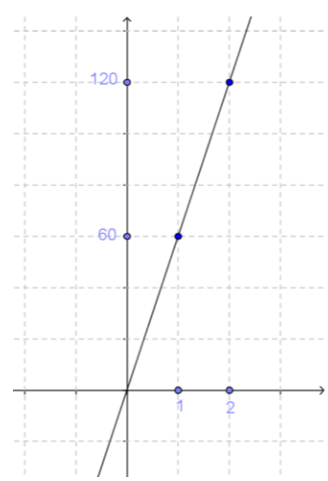
2. **Leer la situación, luego resolver.**

Un automóvil viaja con una velocidad constante de $60km/h$, la distancia recorrida en función del tiempo es $f(t) = 60t$. Determinar si $f(t)$ es una función lineal. Luego trazar un bosquejo de la gráfica.

La función $f(t) = 60t$ es una función lineal, puesto que el grado de la variable independiente (t) es 1. Además tiene la forma y=mx. Para trazar un bosquejo de la gráfica basta hallar dos parejas ordenadas, como se muestra en la tabla de valore. Luego se ubican en el plano cartesiano y se trazan las rectas correspondientes.

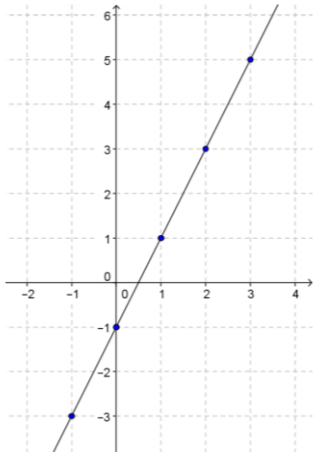
$t\ (horas)$	$f(t)$ km
1	60
2	120

La pendiente vale 60.
Pasa por el origen
De coordenadas (0,0)

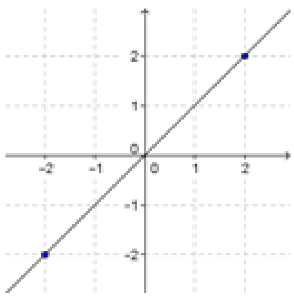


3. Representar gráficamente la función $f(x) = 2x - 1$

x	y	(x, y)
-1	-3	(-1,-3)
0	-1	(0,-1)
1	1	(1,1)
2	3	(2,3)
3	5	(3,5)



4. Para cada grafica determinar su pendiente y la función lineal $f(x) = mx + b$

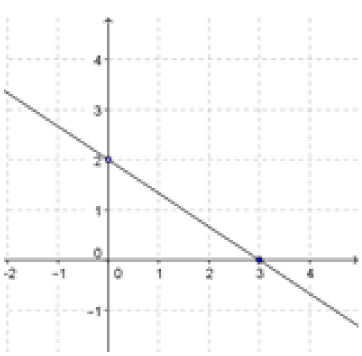


Para calcular la pendiente de la recta, se utiliza la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ donde x_1, y_1, x_2, y_2 son las coordenadas de los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente. Se toman los puntos $(2,2)$ y $(-2. -2)$ y se sustituyen en la fórmula de la pendiente.

$m = \frac{4-2}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$ Valor de la pendiente.

El intercepto de la recta con el eje Y es (0,0)
$y = x + 0$
$y = x$ Función Lineal.

b.



Se toma un par de puntos correspondientes a la gráfica (3,0) y (0,2) y se sustituyen en la fórmula de pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - 3} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

El punto donde la recta corta al eje Y es (0,2), $b = 2$
$f(x) = mx + b$ Se sustituyen valores encontrados.
$f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$ Función Lineal.

5. Indicar cuál de las siguientes funciones representan una función lineal. Justificar la respuesta.

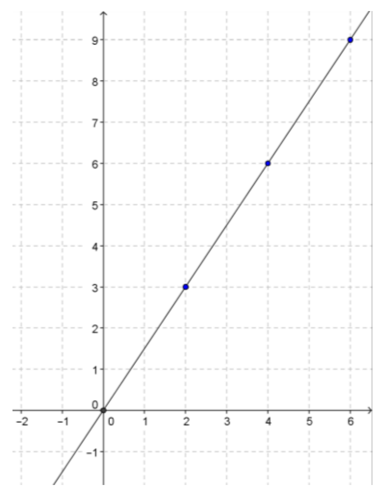
a. $f(x) = 3x + 1$ b. $f(x) = x^3 - 2$

c. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ d. $f(x) = 3x^2 + 5$

Solo "a" representa una función lineal, ya que el máximo exponente de la variable es 1.

6. observa la gráfica y realiza una tabla de valores. Luego determina el Dominio y Rango.

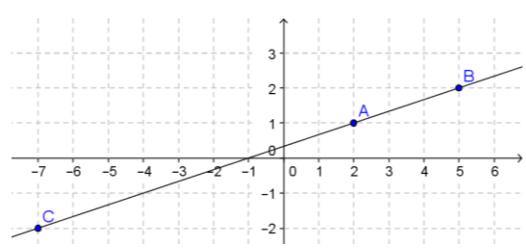
a.



De la gráfica se obtiene:

X	2	4	6	Dominio: R
y	3	6	9	Recorrido: R

b.



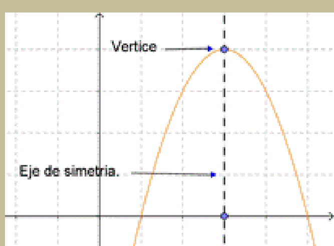
De la gráfica se tiene:

X	-7	-1	2	5	Dominio: R
y	-2	0	1	2	Recorrido: R

1.3 Función Cuadrática.

IDEA IMPORTANTE

Para construir la gráfica de una parábola, basta con conocer las coordenadas del vértice (h,k) y dos puntos por donde pasa la curva.
Una parábola tiene un eje de simetría. El punto de corte entre la parábola y el eje de simetría se llama vértice. Para las parábolas que representan funciones, el eje de simetría es una recta vertical que pasa por el punto medio de los puntos de corte con el eje x.



Una función de la forma $f\,(x) = c + c\,x + c\,x^2$ o $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \in R,\ b \in R\ y\ c \in R, a \neq 0$ cuyo dominio es R recibe el nombre de función cuadrática o función de segundo grado

Expresiones como $f(x) = 3x^2$, $f(x) = 5x^2 + 2x$, $f(x) = x^2 + x + 3$ entre otras son algunos ejemplos de funciones cuadráticas

Gráficamente una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ representa una curva llamada parábola

Elementos de la parábola
En toda parábola se distinguen los siguientes elementos

- **Abertura:** Está determinada por el signo del coeficiente de x^2 si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba y si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo
- **Vértice:** Es el punto $v(h, k)$ donde $h = \frac{-b}{2a}$, y $k = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$
  Si la parábola abre hacia abajo el vértice es el valor máximo si la parábola abre hacia arriba es el valor mínimo
- **Eje de simetría:** Es la recta que pasa por el vértice y es paralela al eje y.
- **Y – Intercepto.** Es el punto (0,c) que se halla al reemplazar x por cero en la expresión
- **X – Intercepto:** son los puntos de corte de la gráfica con el eje x. se hallan al sustituir "f(x)" por cero en la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$
- **El dominio** de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es el conjunto $\mathbb{R}$.
- **El recorrido** o rango de la función es el intervalo $[k, \infty[$ si la parábola abre hacia arriba o $]-\infty, k]$ si la parábola se abre hacia abajo.

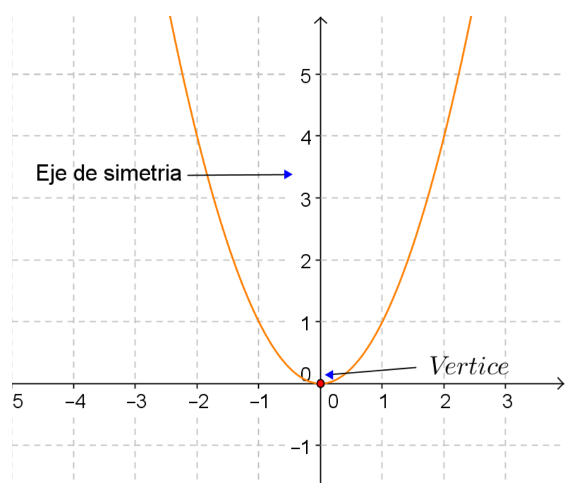
Ejemplos

Graficar las siguientes parábolas señalar sus elementos y hallar su rango

a. $F(x) = x^2$

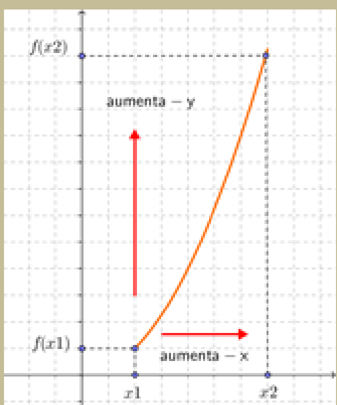
X	-2	-1	0	1	2	3
F(x)	4	1	0	1	4	9

Abertura: hacia arriba
Vértice: $V(0{,}0)$
Eje de simetría $x = 0$
Intercepto con eje Y: (0,0)
Intercepto con x: (0,0)
Dominio: R
Recorrido: $[0, \infty[$

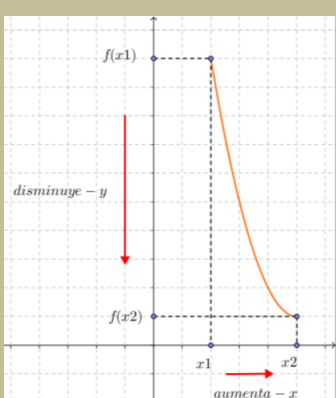


IDEA IMPORTANTE

Si $f(x)$ es creciente en $[a, b]$ si al tomar dos puntos cualesquiera del mismo, x_1 y x_2, con la condición $x_1 \leq x_2$, se verifica que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

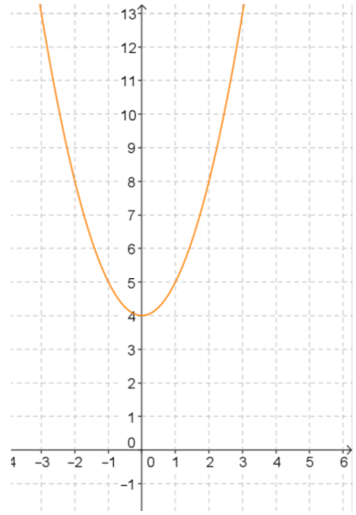


Si f(x) es decreciente en $[a, b]$ si para cualesquiera puntos del intervalo, x_1 y x_2, que cumplan $x_1 \leq x_2$, entonces $f(x1) \geq f(x2)$.



b. $f(x) = x^2 + 4$

X	-2	-1	0	1	2	3
F(x)	8	5	4	5	8	13



Abertura: hacia abajo
Vértice: $V(0,4)$
Eje de simetría $x = 0$
Intercepto con eje Y: (0,4)
Intercepto con x: no existe.
Dominio: R
Recorrido: $[4, \infty[$

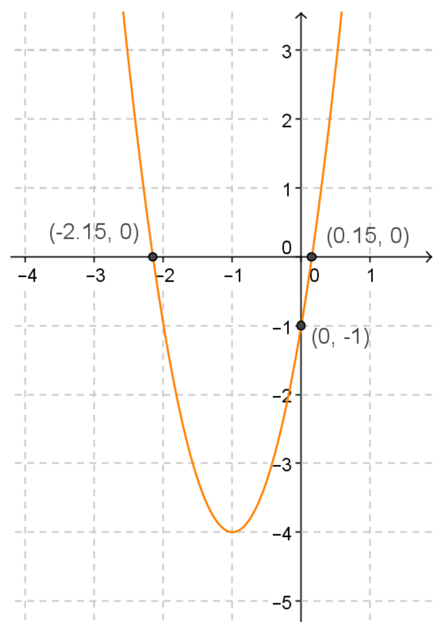
2. Encontrar el vértice y el rango de la función $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$. Trazar la gráfica correspondiente.

Primero se reemplaza $a = 3\ y\ b = 6$ para hallar las coordenadas del vértice.

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(3)} = \frac{-6}{6} = -1$$

Segundo, se halla la imagen de h=-1
$f(h) = 3(-1)^2 + 6(-1) - 1$
$f(h) = -4$

Luego el vértice es $v(-1, -4)$. Puesto que $a = 3$ y $a > 0$ la parábola abre hacia arriba. Finalmente, se hallan las raíces de $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$, las cuales se determinan resolviendo la ecuación cuadrática $3x^2 + 6x - 1 = 0$, utilizando la formula cuadrática.



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como $a = 3$, $b = 6$ y $c = -1$, entonces:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

La curva corta al eje X en los puntos $\left(\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ y $\left(\frac{-3-2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$

La curva corta al eje Y en el punto $(0, -1)$ porque es el término independiente.

1.4 Resolución de problemas

IDEA IMPORTANTE

El término función fue usado por primera vez en 1637 por el matemático francés Rene Descartes, para designar una potencia x^n de la variable x.

En 1694, el matemático Wilhelm Leibniz utilizo el término para referirse a varios aspectos de una curva, como su pendiente.

IDEA IMPORTANTE

Una parábola puede graficarse en el plano cartesiano abierta hacia arriba, hacia abajo, hacia la derecha, hacia la izquierda, con centro en el origen de coordenadas o fuera de este.

Algunos problemas de la vida cotidiana pueden ser descritos a través de funciones cuadráticas

Ejemplos

1. Resolver los problemas

a. En cierta ciudad, la ecuación de demanda para un juguete está dada por la función $f(x) = -0.1x^2 + 0.5x + 0.6$ donde $f(x)$ es el precio unitario de mayorista y "x" la cantidad demandada de juguetes (en miles)

Para el mayorista ¿Cuál es la cantidad ideal de juguetes que debe vender para obtener el mejor precio? ¿Cuál es el precio?

Para calcular la cantidad ideal de juguetes al mejor precio se encuentra el vértice de la parábola. Así: $v\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ donde $a = 0.1, b = 0.5$ y $c = 0.6$

Entonces: $\frac{-b}{2a} = \frac{-0.5}{2(-0.1)} = \frac{-0.5}{-0.2} = 2.5$

$f(2.5) = -0.1(2.5)^2 + 0.5(2.5) + 0.6$
$f(2.5) = 1.225$

Entonces el vértice es $v(25{,}1.225)$
Es decir, que la cantidad ideal de juguetes que se deben vender es 2500 y el precio de cada juguete es de $1.23

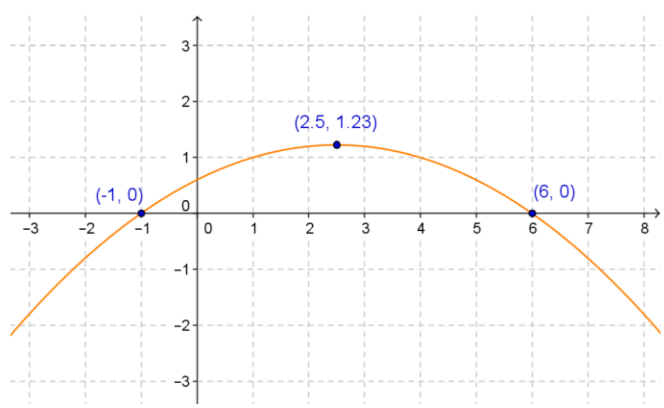
¿Cuál es la cantidad máxima de juguetes que se puede pedir?
Para calcular la cantidad máxima de juguetes que se pueden pedir se buscan los x-intercepto:

$-0.1x^2 + 0.5x + 0.6 = 0$
Donde $a = -0.1$, $b = 0.5$ y $c = 0.6$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-0.5 \pm \sqrt{0.5^2 - 4(-0.1)(0.6)}}{2(-0.1)}$$

$x_1 = -1$ y $x_2 = 6$



De donde se tiene que:

La máxima cantidad de juguetes que se pueden pedir es 6000, ya que si se pide más, cada uno no tendría ningún valor.

El valor -1 no se toma en cuenta, pues esta fuera del contexto del problema.

Los alumnos de la promoción 2012 planean realizar una excursión fuera del país. Una empresa de turismo les cobra $ 100.00 por persona si viajan 50 estudiantes, además, les hace una rebaja de $1 por persona por cada estudiante que exceda de los 50. Además, acepta que viajen 90 y no la organiza si viajan menos de 50 ¿Cuantos estudiantes tienen que hacer la excursión para que la empresa de turismo realice el mejor negocio? ¿Cual sería el costo?

Costo si viajan 50 estudiantes: $100x$
Costo si viajan 50 estudiantes o más: $100x-x$

IDEA IMPORTANTE

El grado de una función está dado por el mayor exponente de la variable involucrada.

Función de grado uno o lineal.
$f(x) = mx + b$

Función de segundo grado o cuadrática
$f(x) = ax^2 + bx + c$

Función de tercer grado o cubica.
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

IDEA IMPORTANTE

El grado de una función está dado por el mayor exponente de la variable involucrada.

Función de grado uno o lineal.
$f(x) = mx + b$

Función de segundo grado o cuadrática
$f(x) = ax^2 + bx + c$

Función de tercer grado o cubica.
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

1.5 Función cubica

Una función cubica es una función de variable real definida por:
$F(x) = c + cx + cx^2 + cx^3$ ò $f(x) = ax^3 + bx^3 + bx^2 + cx + d$
Donde $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}\ y\ d \in \mathbb{R}$ son números reales con $a \neq 0$

El dominio de la función cubica al igual que el rango es el conjunto de los números reales un caso particular de la función cubica se presenta cuando $a = 1,\ b = 0,\ c = 0\ y\ d = 0$ Es decir $f\,(x) = x^3$

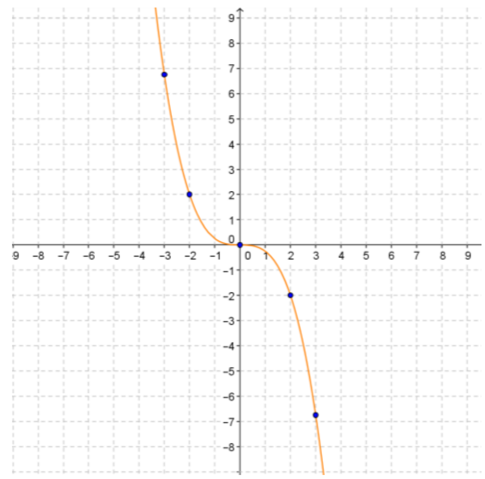
Ejemplos

Representar gráficamente las siguientes funciones

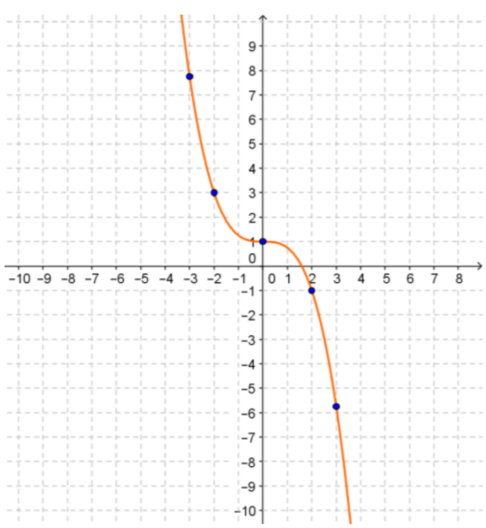
a. $\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{4}\,x^3}$

Se construyen una tabla de valores para cada función Luego se presentan los puntos en el plano cartesiano para trazar el grafico

x	$f(x)$
-3	6.75
-2	2
0	0
2	-2
3	-6.75



a. $\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{4}\,x^3 + 1}$



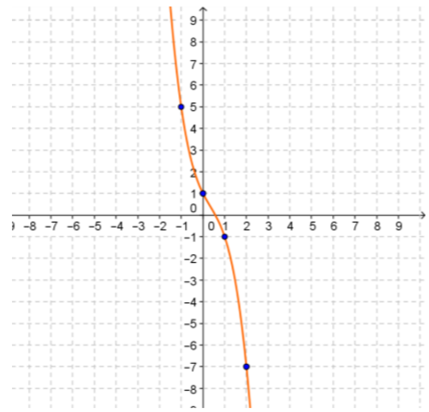
x	$f(x)$
-3	7.75
-2	3
0	1
2	-1
3	-5.75

IDEA IMPORTANTE

Una función cubica puede expresarse de la forma $y = x^3$ o $f(x) = x^3$, si se considera como dominio el conjunto de los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ se obtiene una gráfica discontinua, y si se hace en los reales positivos $\mathbb{R}^+$ la gráfica será continua.

2. **Construir la gráfica de la función $h(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 1$**
3. Se construye la tabla de valores con $x = -1,0,1,2, \in \mathbb{R}$. Las parejas obtenidas se trasladan al plano cartesiano.

x	$f(x)$
-1	5
0	1
1	-1
2	-7
3	-23



IDEA IMPORTANTE

Dada la función:

$f(x) = \frac{2x}{(x+3)(2x-1)}$

¿Para qué valores de "x" esta indeterminada la función? Explica

1.6 Función Raíz cuadrada

Se llama función raíz cuadrada a toda función de la forma $f(x) = \sqrt{x}$ donde $x \geq 0$ y cuyo dominio es $[0, +\infty[$

Por ejemplo. Las funciones $f(x), g(x)$ y $h(x)$ representada por: $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{\frac{3x}{2}}$; $h(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2-1}}$ son funciones raíz cuadrada.

La función no está definida en los valores de x para los cuales el radicando es negativo si la función posee un polinomio en el denominador hay que considerar los principios para graficar las funciones racionales.

Ejemplos

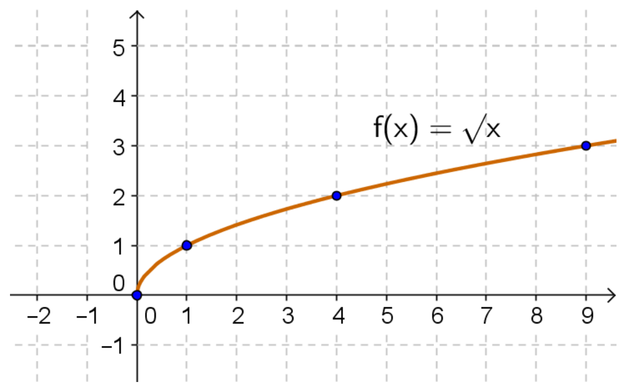
1. **Analizar la presentación grafica de la función $f(x) = \sqrt{x}$**

Se elabora una tabla de valores y se grafica la función

x	0	1	4	9
$f(x) = \sqrt{x}$	0	1	2	3

La función es creciente es todo su dominio.

Dominio de $f(x)$: $[0, +\infty[$
Recorrido de $f(x)$: $[0, +\infty[$



2. **Determina el Dominio y el Rango de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$**

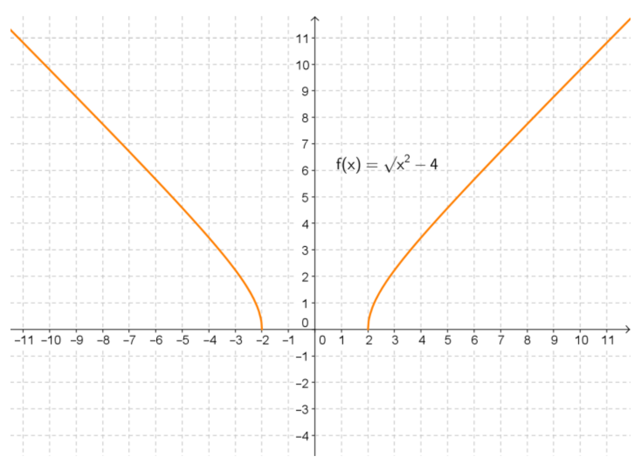
Dominio de la función $f(x)$ es $x^2 - 4 \geq 0$

$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \geq 0$

	$-\infty$ -2	-2 2	2 ∞
$x+2$	-	+	+
$x-2$	-	-	+
$(x-2)(x+2)$	+	-	+

El dominio de la función se encuentra en el intervalo $]-\infty, -2]U[2, \infty[$

El Recorrido de la función se encuentra en el Intervalo $[0. \infty[$



IDEA IMPORTANTE

EL rango de una función radical puede determinarse al trazar y analizar la gráfica.

3. Determina el dominio y representar gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Aplicando los principios de graficacion a $f(x)$ se tiene la función $\boldsymbol{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Que es el cociente de dos funciones

La cantidad subradical $x^2 - 1$ debe ser estrictamente mayor que cero

Por ser una función racional presenta 2 asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$

F(x) no intercepta al eje "y", ya que no esta definida para x=0

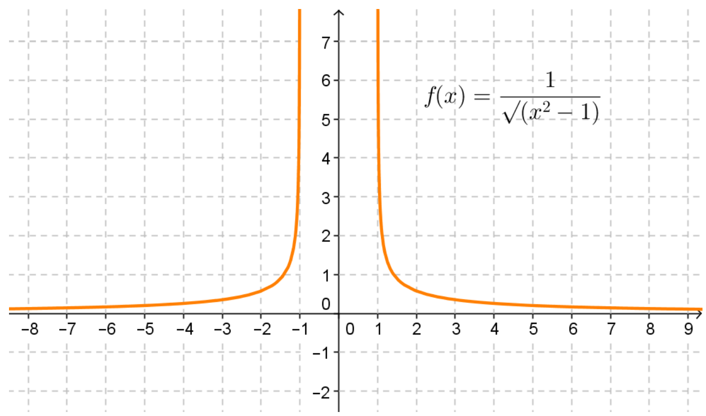
F(x) no tiene asíntota horizontal

Dominio de f(x): $]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$

Rango $]0, \infty[$

Completa la tabla de valores y sus respectivos gráficos.

x	y	(x, y)
-4	0.26	(-4, 0.26)
-3	0.35	(-3, 0.35)
-2	0.58	(-2, 0.58)
-1.50	0.89	(-1.50, 0.89)
-1.25	1.33	(-1.25, 1.33)
-1.10	2.18	(-1.10, 2.18)
1.10	2.18	(1.10, 2.18)
1.50	0.89	(1.50, 0.89)
2	0.58	(2, 0.58)



1.7 Resolución de problemas con la función raíz cuadrada

IDEA IMPORTANTE

Todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones.

Las funciones algebraicas pueden ser constantes, lineales, cuadráticas o cubicas.

IDEA IMPORTANTE

Dos magnitudes se encuentran relacionadas si y solo si una depende de la otra. Una de ellas es variable independientemente y se ubica en el eje "x", y la otra es la variable dependiente y se ubica en el eje "y". La relación entre las dos magnitudes se expresan mediante una ecuación o formula, y se representa en una tabla de valores o en un gráfico.

Muchas situaciones problemáticas de la vida cotidiana se plantean con funciones raíz cuadrada

Ejemplos

1) Resolver

a. Las torres Gemelas de Nueva York derribadas en un atentado terrorista el 11 de septiembre de 2001 median 430 metros de altura

Debido a la curvatura de la tierra la distancia máxima "d" que podía verse desde su plataforma superior viene dada por la formula

$d = \sqrt{2Rh + h^2}$

Dónde:

R: Radio de la tierra (3 956 millas)

h: Altura de las torres gemelas

Calcular la distancia máxima (d) que podía verse su plataforma.

Las unidades deben estar en el mismo sistema, primero convertimos 3, 946 millas a metros, así:

$3{,}946\ millas = 3{,}946\ millas * \dfrac{1{,}609\ metros}{1\ millas}$

$6{,}365{,}204\ metros, entonces:$

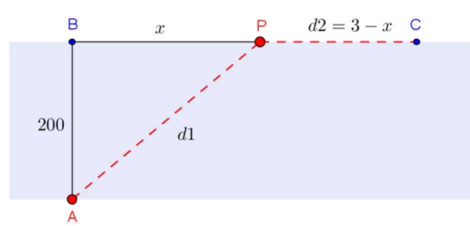
$d = \sqrt{2(6{,}365{,}204m)(430m) + (430m)^2}$ Sustituyendo datos

$d = 73{,}988.24m$

La distancia que podía verse desde la plataforma superior de las torres era $73{,}998\ m$.

b. Los puntos A y B se encuentran en lados opuestos de un rio que tiene 200 m de ancho en línea recta. Un unto C está a 3 km rio abajo del mismo lado que B. Un atleta en su preparación nada desde un punto A hasta un punto P situado entre los puntos B y C, Después corre de P a C.

Expresar la distancia total recorrida en función de la variable. Si el atleta nada a razón de 3m/s y corre a razón de km/h, expresar el tiempo total "T" para ir de A a C como función de una variable.

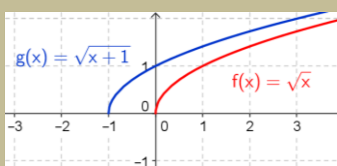


Se utiliza el teorema de Pitágoras para determinar la distancia entre los puntos A y P.

IDEA IMPORTANTE

La función raíz cuadrada puede desplazar su grafico a la derecha o a la izquierda sobre el eje x, según sea el sumando que acompañe a la variable.

Observa:
$f(x) = \sqrt{x}$
$g(x) = \sqrt{x+1}$



c. Los puntos a y b se encuentran en lados opuestos de un rio que tiene 200 m de ancho en línea recta un punto c está a 3 km rio abajo del mismo lado que B un atleta en su preparación nada desde el punto A y hasta un punto P situado entre los puntos b y corre p a c

$d_1 = D_1(x) = \sqrt{x^2 + (200m)^2}$

$$d_2 = D_2(x) = 3000 - x$$

La distancia total recorrida es la suma de $d_1 + d_2$

$D_T(x) = \sqrt{x^2 + 200^2} + 3000 - x$

El tiempo total recorrido es la suma de los tiempos utilizados en cada etapa.

Como la distancia es recorrida con una velocidad uniforme, se calcula el tiempo para cada etapa del viaje, dividiendo cada distancia entre su velocidad.

Se sabe que:

$v = {}^{d}/_{t}$

La velocidad expresada en km/h se convierte a m/s, así:

$\frac{14 * 1000}{3600} = 3.89$

$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + (200m)^2}}{3m/s}$

$t_2 = \frac{300 - x}{3.89\ m/s}$

Luego $t_T = \frac{\sqrt{x^2+(200m)^2}}{3m/s} + \frac{300-x}{3.89\ m/s}$

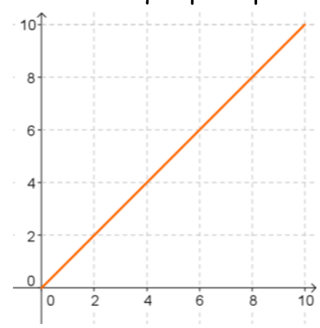
La función "t" es variable con x.

1.8 Funciones de proporcionalidad directa e inversa

Son aquellas que responden a la relación entre magnitudes medibles

Proporcionalidad Directa.
Se dice que la variable y es directamente proporcional a la variable x cuando se cumple que $y = kx$ donde k_i es una constante diferente de cero llamada constante de proporcionalidad

Una función de proporcionalidad directa o función lineal se expresa de la forma $f(x) = mx$ con "m" un número cualquiera y su grafico es una recta que pasa por el origen



El valor "m" en la expresión $y = mx$ recibe el nombre de pendiente. La pendiente de una recta indica el grado de variación de "y" al variar "x". En el grafico se observa que si la "x" aumenta lo hace también "y", la pendiente es positiva y la función es creciente.

Ejemplos

1) **Resolver**
En una papelería se compraron hojas de papel de 2 tipo a y b las hojas tipo A cuestan 2 centavos cada una y las de tipo B cuestan 3 centavos.

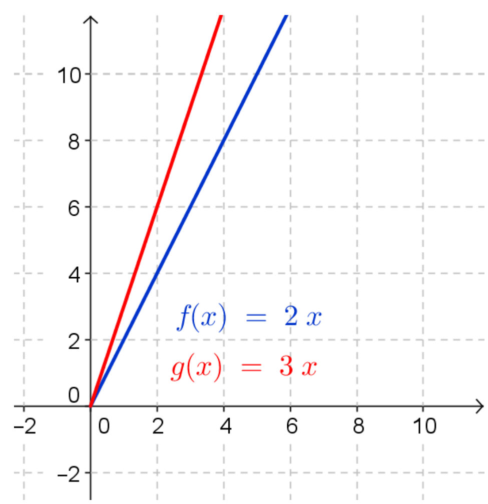
Las magnitudes números de hojas y precios son, en ambos casos, directamente proporcionales.
Las funciones que relacionan el número de hojas (x) con el precio (y) son:
$f(x) = 2x$, para el tipo A.
$g(x) = 3x$, para el tipo B.
Las constantes de proporcionalidad son 2 y 3.
Su grafico es una línea recta con origen en (0,0)

$f(x) = 2x$

x	0	1	2	3
$f(x) = 2x$	0	2	4	6

$g(x) = 3x$

x	0	1	2	3
$g(x) = 3x$	0	3	6	9



Proporcionalidad Inversa.
Se dice que una variable "y" es inversamente proporcional a la variable "x" cuando $y = \frac{k}{x}, k \neq 0$ donde "k" es una constante.

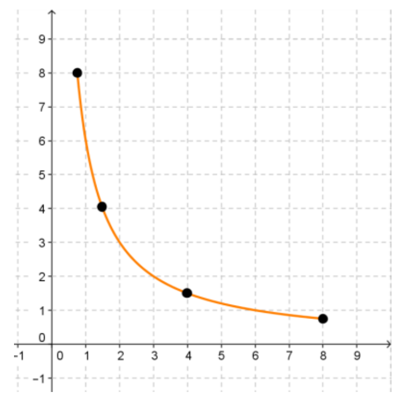
Una función de proporcionalidad relaciona 2 magnitudes inversamente proporcionales su expresión es $f(x) = \frac{k}{x}$

El dominio de la función son todos los números reales excepto el 0 en x= 0 la función no está definida y presenta una discontinuidad observa la figura 1 el comportamiento de la x = 0 la solución al tomar valores próximos a 0 se acerca más y más a la recta vertical x= 0 (eje y) sin llegar a tocarla nunca. Se dice que esa recta es una **asíntota vertical**

Ejemplos

Ana debe realizar un trabajo en seis días. Si le ayuda su amigo enrique ¿Cuántos días le tomara realizarlo? ¿Y si son tres personas?

Trabajadores (x)	1	2	3	4	5	6
Tiempo en días (y)	6	3	2	1.5	1.2	1



Observa, que al multiplicarse las cantidades correspondientes de las dos magnitudes, número de personas (x) y días que tardan (y) el resultado es siempre el mismo. Las magnitudes son inversamente proporcionales.

Si se presentan en el mismo sistema de coordenadas los puntos, se obtiene una gráfica discontinua. La función que relaciona las magnitudes "x" e "y" es una función de proporcionalidad inversa. Se expresa de la forma: $x * y = 6$ ò $bien\ f(x) = \frac{6}{x}$

1.9 Función inversa

Si $f(x)$ es una función uno a uno defina el conjunto "x" en el conjunto "y" con dominio $Dom\, f(x)$ y rango $Ran\, f(x)$ se define la función inversa f^{-1} al cuadrado cuyo dominio es $Ran\, f(x)$ y cuyo rango es $Dom\, f(x)$ como $f^{-1}(y) = x$ si y solo si $y = f(x)$, para todo $y \in Ran\, f(x)$

El -1 usado en la expresión $f^{-1}(x)$ no debe confundirse con el exponente, es decir:

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

De la definición función inversa se puede ver que si la imagen de x por la función f es y entonces la imagen de y por la función $f^{-1}(x)$ es x. Además si la función x esta definida del conjunto x en el conjunto y la función $f^{-1}(x)$ está definida del rango de la función f en el conjunto x.

Una función $f(x)$, que es uno a uno, con $Dom\, f(x) = \{0,1,2,3\}$, y $Ran\, f(x) = \{0,2,4,6\}$. Para la función $f^{-1}(x)$, el dominio es $Ran\, f(x) = \{0,2,4,6\}$ y el Rango es $Dom\, f(x) = \{0,1,2,3\}$

Ejemplos

Determinar la inversa de las funciones.

d. $\boldsymbol{f(x) = 3x + 5, para\ x \in \mathbb{R}}$

Las funciones son uno a uno porque cada elemento del rango es imagen de un solo elemento del Dominio.

$y = 3x + 5$ Se cambia las variables $x \to y$ & $y \to x$

$x = 3y + 5$ Se despeja la variable "y"

$\frac{x-5}{3} = y$ Como $y = f^{-1}(x)$

$$f^{-1}(x) = \frac{y-5}{3}$$

e. $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 + 3, para\ x \in \mathbb{R}}$

$y = 2x^2 + 3$ Se cambia las variables $x \to y$ & $y \to x$

$x = 2y^2 + 3$ Se despeja la variable "y"

$\sqrt{\frac{x-3}{2}} = y$ Como $y = f^{-1}(x)$

Entonces:

$\sqrt{\frac{y-3}{2}} = f^{-1}(x)$ Función Inversa.

f. $\boldsymbol{h(x) = \frac{1}{x} + 8, para\ x \in \mathbb{R}}$

$y = \frac{1}{x} + 8$ Se cambia las variables $x \to y$ & $y \to x$

$x = \frac{1}{y} + 8$ Se despeja la variable "y"

$y = \frac{1}{(x-8)}$ Como $y = f^{-1}(x)$

Entonces:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x-8}$$

a. $\boldsymbol{f(x) = \frac{3x+5}{4}, para\ x \in \mathbb{R}}$

$y = \frac{3x+5}{4}, para\ x \in \mathbb{R}$ Se cambia las variables

$x \to y$ & $y \to x$

$x = \frac{3y+5}{4}$ Se despeja la variable "y"

$\frac{4x-5}{3} = y$ Como $y = f^{-1}(x)$

$$\frac{4x-5}{3} = f^{-1}(x)$$

b. $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{2x-3},\ para\ x \geq {}^{3}/_{2}}$

$y = \sqrt{2x-3}$ Se cambia las variables $x \to$ y & $y \to x$

$x = \sqrt{2y-3}$ Se despeja la variable "y"

$\frac{x^2+3}{2} = y$ Como $y = f^{-1}(x)$

Entonces:

$\frac{x^2+3}{2} = f^{-1}(x)$ Función Inversa.

c. $\boldsymbol{h(x) = x^3 + 1, para\ x \in \mathbb{R}}$

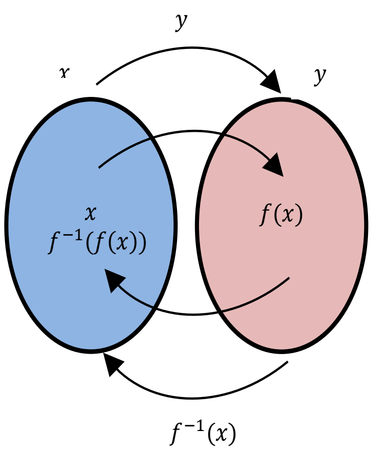
$y = x^3 + 1$ Se cambia las variables $x \to$ y & $y \to x$

$x = y^3 + 1$ Se despeja la variable "y"

$\sqrt{x-1} = y$ Como $y = f^{-1}(x)$

Entonces:

$\sqrt{x-1} = f^{-1}(x)$



3. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x+1}{3}$ y su inversa.

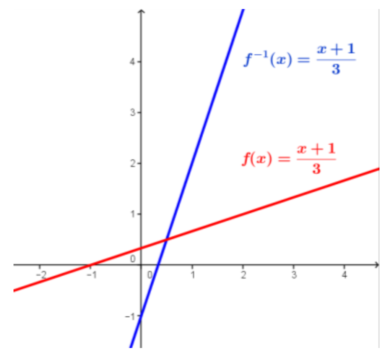
La grafica de $f(x) = \frac{x+1}{3}$ es una recta cuyo punto de intersección con el eje "y" es $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ y cuya pendiente es $\frac{1}{3}$. Para trazar la gráfica de $f^{-1}(x)$ que es una potencia se debe tener en cuenta que cada punto de y=x equidista de la grafica $f(x)$ y de la grafica $f^{-1}(x)$. Además, se reemplaza "x" por "y" & "y" por "x" asi:

$$y = \frac{x+1}{3}$$

$x = \frac{y+1}{3}$ Se cambian las variables.

$3x = y + 1$

$3x - 1 = y,$ entonces: $f^{-1}(x) = 3x - 1$



4. Encontrar, si es posible, la función inversa de $f(x) = 2x + 1$. Luego trazar su gráfica y determina el dominio y el rango.

Primero se compruebas si $f(x)$ es biyectiva. Para ello:
Si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $3(x_1) + 1 = 3(x_2) + 1$ de donde $x_1 = x_2$, luego $f(x)$ es inyectiva.

Además $Ranf(x) = \mathbb{R}$ y $Domf(x) = \mathbb{R}$, por tanto $f(x)$ es sobreyectiva.

Como $f(x)$ es inyectiva y sobreyectiva entonces $f(x)$ es biyectiva.

Segundo, se halla la función inversa, para ello se toma $f(x) = 2x + 1$ asi:

$y = 2x + 1$, se reemplaza "x" por "y" & viceversa.
$x = 2y + 1$
$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$