

UNIDAD 4
APRENDAMOS A
FACTORIZAR



CENTRO ESCOLAR REPUBLICA DE NICARAGUA
GUION DE CLASE

Grado: 8º grado A y B
Asignatura: Matemática
Tiempo: _____
Periodo: _____

Profesor Responsable: Santos Jonathan Tzun Meléndez.

<p>UNIDAD 3. APRENDAMOS A FACTORIZAR Objetivo de unidad: Utilizar la factorización algebraica como un medio para interpretar sus contextos escolares y sociales, y de esta manera proponer soluciones creativas a los problemas que en dichos ámbitos existan.</p>		<p>Metodología: La forma de trabajo estará basada en la Resolución de Problemas a Situaciones Reales. Para lo cual el profesor explicara de forma expositiva sobre el concepto, la deducción y la aplicación del mismo.</p>
CONTENIDOS CONCEPTUALES	CONTENIDOS PROCEDIMENTALES	CONTENIDOS ACTITUDINALES
<p>1. Factor común:</p> <ul style="list-style-type: none"> Factor común monomio Factor común polinomio 	<p>✓ Determinación y aplicación del factor común monomio y polinomio.</p>	<p>✓ Seguridad al determinar el factor común monomio y polinomio de expresiones algebraicas.</p>
<p>2. Trinomio cuadrado perfecto:</p>	<p>✓ Resolución de ejercicios y problemas aplicando trinomio cuadrado perfecto.</p>	<p>✓ Perseverancia en la solución de ejercicios y problemas aplicando trinomio cuadrado perfecto.</p>
<p>3. Trinomios factorizables que no son trinomios cuadrados perfectos:</p>	<p>✓ Resolución de ejercicios y problemas aplicando trinomio cuadrado no perfecto.</p>	<p>✓ Perseverancia en la solución de ejercicios y problemas aplicando trinomios cuadrados perfectos.</p>
<p>4. Diferencia de cuadrados:</p>	<p>✓ Factorización y resolución de problemas aplicando la descomposición de expresiones algebraicas por diferencia de cuadrados.</p>	<p>✓ Certeza en la aplicación de la diferencia de cuadrados. ✓ Perseverancia al resolver problemas aplicando la diferencia de cuadrado.</p>
<p>5. Suma de cubos. 6. Diferencia de cubos.</p>	<p>✓ Aplicación de reglas para determinar si una expresión algebraica es factorizable por suma o diferencia de cubos.</p>	<p>✓ Seguridad en la aplicación de la descomposición factorial por suma y/o diferencia de cubos. ✓ Perseverancia en la resolución de problemas utilizando la suma o diferencia de cubos.</p>
<p>7. Trinomios cuadrados perfectos y diferencia de cuadrados combinados.</p>	<p>✓ Factorización de expresiones algebraicas aplicando la combinación del trinomio cuadrado perfecto con la diferencia de cuadrados.</p>	<p>✓ Seguridad y certeza en la aplicación de reglas para factorizar por la combinación del trinomio cuadrado perfecto con la diferencia de cuadrados.</p>
<p>Objetivo: que el alumno sea capaz de:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Determinar y aplicar el factor común monomio y polinomio. ✓ Mostrar Seguridad al determinar el factor común monomio y polinomio de expresiones algebraicas. 		<p>Material de Apoyo</p> <ul style="list-style-type: none"> • Matemática 2º año. Raúl Aguilera Liborio. • Matemática 1º año de bachillerato Santillana (pioneros)
<p>Indicadores de logro.</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Determina y aplica el factor común monomio y polinomio. ✓ Muestra Seguridad al determinar el factor común monomio y polinomio de expresiones algebraicas. ✓ Resuelve ejercicios y problemas aplicando trinomio cuadrado perfecto. ✓ Muestra Perseverancia en la solución de ejercicios y problemas 		<p>Evaluación: Resolución de problemas dentro del salón de clases en el cuaderno de trabajo.</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Orden y aseo 5% ✓ Puntualidad 5% ✓ Desarrollo correcto 90%

<p><i>aplicando trinomio cuadrado perfecto.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ <i>Resuelve ejercicios y problemas aplicando trinomio cuadrado no perfecto.</i> ✓ <i>Muestra Perseverancia en la solución de ejercicios y problemas aplicando trinomios cuadrados perfectos.</i> ✓ <i>Factoriza y resuelve problemas aplicando la descomposición de expresiones algebraicas por diferencia de cuadrados.</i> ✓ <i>Muestra Certeza en la aplicación de la diferencia de cuadrados.</i> ✓ <i>Muestra Perseverancia al resolver problemas aplicando la diferencia de cuadrado.</i> ✓ <i>Aplica reglas para determinar si una expresión algebraica es factorizable por suma o diferencia de cubos.</i> ✓ <i>Muestra Seguridad en la aplicación de la descomposición factorial por suma y/o diferencia de cubos.</i> ✓ <i>Muestra Perseverancia en la resolución de problemas utilizando la suma o diferencia de cubos.</i> ✓ <i>factoriza expresiones algebraicas aplicando la combinación del trinomio cuadrado perfecto con la diferencia de cuadrados.</i> ✓ <i>Muestra Seguridad y certeza en la aplicación de reglas para factorizar por la combinación del trinomio cuadrado perfecto con la diferencia de cuadrados.</i> 	
--	--

	Actividad	Tiempo
3	Bienvenida y asistencia	
4	Presentación del contenido y objetivo de la clase	
5	Exploración de Conocimientos Previos	
6	Introducción a la temática	
7	Problematización del contenido y transposición didáctica de conceptos	
8	Delegación de actividades y cierre	
	Tiempo Hora Clase	

Actividad Diagnostica:
 Entra al siguiente link
<http://rolandotzun.wordpress.com/>
 Lee la información que ahí se almacena y cópiala en tu cuaderno.

CASO 1: FACTOR COMÚN

"Común" significa que están o que pertenecen a todos. De tal manera que **factor común** tiene el significado de la(s) cantidad(es) que aparece(n) multiplicando en todos los términos de la expresión. Recuérdese que *término* es lo que "juega a la suma", o sea, la cantidad que está sumando.

Ejemplo 1: $2 \times 3 + 7 \times 3$

Análisis:* Existen dos términos, es decir que hay dos cantidades que se están sumando: uno es 2×3 ; el otro es 7×3 .

- * En cada término existen dos factores. En el primer término 2×3 los factores son el 2 y el 3 (porque se están multiplicando). En el término 7×3 los factores son el 7 y el 3 .
- * En cada uno de los dos términos anteriores, hay un factor que aparece en todos, es decir, es común, el cual es el 3 .
- * Por lo tanto, en $2 \times 3 + 7 \times 3$, el factor común es el 3 .

Para factorizar una expresión que en todos sus términos aparece por lo menos un factor común, se tiene la siguiente regla:

Factorización por término común:

- * *Se localizan y se escriben todos los factores comunes en su máxima expresión.*
- * *Se escribe a continuación un paréntesis y adentro de él lo que queda de la expresión original luego de haberle quitado a cada término los factores comunes.*
- * *En caso de que el factor común sea todo uno de los términos de la expresión original, en su lugar se pone 1 .*

En la regla anterior, debe quedar claro que la afirmación "*luego de haberle quitado a cada término los factores comunes*", no debe entenderse como simplemente borrarlos o desaparecerlos, sino que es equivalente a realizar una división de cada término de la expresión original entre el factor común, ya que lo que se está multiplicando (factor) se quita a través de su operación inversa que es precisamente la división.

Ejemplo 2: Factorizar $2a^3b + 7bxy^5$

Solución: Se localizan y se escriben todos los factores comunes: en este caso es la b .
Se escribe a continuación un paréntesis y adentro de él lo que queda de la expresión original luego de haberle quitado a cada término los factores comunes:

$$b(2a^3 + 7xy^5).$$

Finalmente significa que $2a^3b + 7bxy^5 = b(2a^3 + 7xy^5)$.

Ejemplo 3: Factorizar $4a^2b + 6abx^5$

Solución: Se localizan y se escriben todos los factores comunes: en este caso es $2ab$.
Se escribe a continuación un paréntesis y adentro de él lo que queda de la expresión original luego de haberle quitado a cada término los factores comunes:

$$2ab(2a + 3x^5).$$

Finalmente significa que $4a^2b + 6abx^5 = 2ab(2a + 3x^5)$. Obsérvese que en esta última expresión, la operación principal es la multiplicación.

Ejemplo 4: Factorizar $12a^4b^3c - 6a^2b^3x^7$

Solución: Se localizan y se escriben todos los factores comunes: en este caso es $6a^2b^3$.
Se escribe a continuación un paréntesis y adentro de él lo que queda de la expresión original luego de haberle quitado a cada término los factores comunes:

$$6a^2b^3(2a^2c - x^7)$$

* Finalmente significa que $12a^4b^3c - 6a^2b^3x^7 = 6a^2b^3(2a^2c - x^7)$. Obsérvese que en esta última expresión, la operación principal es la multiplicación.

Ejemplo 5: Factorizar $5b^2cx - 60a^2b^2c^5x^2$

Solución: Se localizan y se escriben todos los factores comunes: en este caso es $5b^2cx$.
Se escribe a continuación un paréntesis y adentro de él lo que queda de la expresión original luego de haberle quitado a cada término los factores comunes. Como el factor común es todo el primer término de la expresión original, en su lugar se pone 1 :

$$5b^2cx(1 - 12a^2c^4x)$$

* Finalmente significa que $5b^2cx - 60a^2b^2c^5x^2 = 5b^2cx(1 - 12a^2c^4x)$. Obsérvese que en esta última expresión, la operación principal es la multiplicación.

Ejemplo 6: Factorizar $8b^2 - 20a^2b^2 + 16ab^3c^4$

Solución: Se localizan y se escriben todos los factores comunes: en este caso es $4b^2$.
Se escribe a continuación un paréntesis y adentro de él lo que queda de la expresión original luego de haberle quitado a cada término los factores comunes:

$$4b^2(2 - 5a^2 + 4abc^4).$$

* Finalmente significa que $8b^2 - 20a^2b^2 + 16ab^3c^4 = 4b^2(2 - 5a^2 + 4abc^4)$. Obsérvese que en esta última expresión (derecha del signo igual), la operación principal es la multiplicación.

EJERCICIO 4



Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

- | | | |
|---------------------------------------|---|---|
| 1) $3b - 9a$ | 2) $2ax - 9x^2$ | 3) $a^2d^5x + 2a^3a^2$ |
| 4) $6a^5b - 9aba + 3b^7$ | 5) $12a^5x - 9x^2 + 9b^3x^3$ | 6) $8ba^2x + 2ab^3a^2x^3 - 4a^2b^2a^2$ |
| 7) $14a^2b^2 + 21ab^8a + 35a^4b^7c^2$ | 8) $12a^3b^4x - 9b^4x^4 + 36x^3$ | 9) $bc^2 + 22ab^2c^4x - 14a^2bc^2$ |
| 10) $40b^6 + 8abc - 35a^9b^4c$ | 11) $26a^5b^5x - 13b^4x + 39a^2b^7x^3$ | 12) $4b^2c^2 + 4b^2c^4 - 4bc^2$ |
| 13) $6ab^6c + 3abc - 3a^6b^8c$ | 14) $6a^2b^4d - 6b^3d^3x + 16a^2b^9x^2$ | 15) $40b^5c^5 + 20a^6b^9c^4 - 100a^6b^5c^4$ |
| 16) $8a^7cf + 3ab^2cf - 3a^2c$ | 17) $ab^4d - b^7d^8x + a^2$ | 18) $40c^3 + 2b^{11}c - 100$ |

CASO 2: POR AGRUPACIÓN

El proceso consiste en formar grupos o agrupar términos en cantidades iguales (de dos en dos, o de tres en tres, etc.), para luego factorizar cada grupo por *factor común* y finalmente volver a factorizar por *factor común*, en donde el paréntesis que debe quedar repetido en cada grupo es el factor común.

Como regla práctica, el signo del primer término de cada grupo es el signo que debe ponerse en cada factorización por *factor común*.

Ejemplo 1: Factorizar $2ac + bc + 10a + 5b$

Solución: Se forman dos grupos, uno con los dos primeros términos y el otro con los otros dos términos.

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \underbrace{2ac + bc} + \underbrace{10a + 5b} \end{array}$$

Factorizando cada grupo por factor común: El primer grupo tiene a c como factor común, mientras que el segundo grupo tiene al 5 . De manera que resulta que:

$$2ac + bc + 10a + 5b = c(2a + b) + 5(2a + b)$$

Obsérvese que en ésta última expresión (la de la derecha del signo igual), la operación principal es la suma, por lo que no está aún factorizado.

Volviendo a factorizar por factor común, ya que el paréntesis repetido es ése factor común, finalmente se obtiene que

$$2ac + bc + 10a + 5b = (2a + b)(c + 5).$$

Obsérvese que en esta última expresión (la de la derecha del signo igual), la operación principal es la multiplicación, por lo que ya está factorizado.

Ejemplo 2: Factorizar $a^2b^3 - 5b^4 - 6a^2 + 30b$

Solución: Se forman dos grupos, uno con los dos primeros términos y el otro con los otros dos términos.

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \underbrace{a^2b^3 - 5b^4} - \underbrace{6a^2 + 30b} \end{array}$$

Nótese que el signo que quedó entre cada grupo fue negativo.

Factorizando cada grupo por factor común: El primer grupo tiene a b^3 como factor común, mientras que el segundo grupo tiene al 6. De manera que resulta que:

$$a^2b^3 - 5b^4 - 6a^2 + 30b = b^3(a^2 - 5b) - 6(a^2 - 5b)$$

Como el signo que había quedado anteriormente entre cada grupo fue negativo, ese mismo signo es el que se colocó entre cada factorización. Obsérvese que en ésta última expresión (la de la derecha del signo igual), la operación principal es la resta, por lo que no está aún factorizado.

Volviendo a factorizar por factor común, ya que el paréntesis repetido es ese factor común, finalmente se obtiene que

$$a^2b^3 - 5b^4 - 6a^2 + 30b = (a^2 - 5b)(b^3 - 6)$$

Nótese que en esta última expresión (la de la derecha del signo igual), la operación principal es la multiplicación, por lo que ya está factorizado.

Ejemplo 3: Factorizar $3ab + x^2 - 21ab^2 - 7bx^2$

Solución: Se forman dos grupos, uno con los dos primeros términos y el otro con los otros dos términos.

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \underbrace{3ab + x^2} - \underbrace{21ab^2 - 7bx^2} \end{array}$$

Nótese que el signo que quedó entre cada grupo fue negativo.

Factorizando cada grupo por factor común: El primer grupo tiene a 1 como factor común, mientras que el segundo grupo tiene al $7b$. De manera que resulta que:

$$3ab + x^2 - 21ab^2 - 7bx^2 = 1(3ab + x^2) - 7b(3ab + x^2)$$

Como el signo que había quedado anteriormente entre cada grupo fue negativo, ese mismo signo es el que se colocó entre cada factorización. Obsérvese que en ésta última expresión (la de la derecha del signo igual), la operación principal es la resta, por lo que no está aún factorizado.

factorizando por factor común, ya que el paréntesis repetido es ese factor común, se obtiene que

$$3ab + x^2 - 21ab^2 - 7bx^2 = (3ab + x^2)(1 - 7b)$$

Obsérvese que en esta última expresión (la de la derecha del signo igual), la operación principal es la multiplicación, por lo que ya está factorizado.

Ejemplo 4: Factorizar $2ab^2 + b^3 - 5b^2 + 6a + 3b - 15$

Solución: En este caso, el hecho que haya seis términos sugiere que se pueden formar dos grupos de a tres términos cada uno. Se forman entonces dos grupos, uno con los tres primeros términos y el otro con los otros tres términos.

$$\underbrace{2ab^2 + b^3 - 5b^2} + \underbrace{6a + 3b - 15}$$

Nótese que el signo que quedó entre cada grupo fue positivo.

Factorizando cada grupo por factor común: El primer grupo tiene ab^2 como factor común, mientras que el segundo grupo tiene al 3. De manera que resulta que:

$$2ab^2 + b^3 - 5b^2 + 6a + 3b - 15 = b^2(2a + b - 5) + 3(2a + b - 5)$$

Como el signo que había quedado anteriormente entre cada grupo fue positivo, ese mismo signo es el que se colocó entre cada factorización. Obsérvese que en ésta última expresión (la de la derecha del signo igual), la operación principal es la suma, por lo que no está aún factorizado.

Volviendo a factorizar por factor común, ya que el paréntesis repetido es ése factor común, finalmente se obtiene que

$$2ab^2 + b^3 - 5b^2 + 6a + 3b - 15 = (2a + b - 5)(b^2 + 3)$$

EJERCICIO 5



Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

- | | |
|--|---|
| 1) $ac + bc + 2ax + 2bx$ | 2) $2a^2 - 4ab - 5a + 10b$ |
| 3) $ab - 1 - abx + x$ | 4) $7ab^2 + ac - 14b^2xy - 2cxy$ |
| 5) $6ab^3x - 4b^3 + 21ax - 14$ | 6) $x^2y^3 + 5y^3 - 3x^2 - 15$ |
| 7) $2b^3 + 3c^3 - 2b^3x - 3c^3x$ | 8) $b^3c^3 - 2b^2c + bc^2 - 2$ |
| 9) $2a - 4b + 2c^2 - axy + 2bxy - c^2xy$ | 10) $5ab - 10 - 5x - abc^2 + 2c^2 + c^2x$ |
| 11) $9x - 8y + 7 - 9a^2x + 8a^2y - 7a^2$ | 12) $a^2x^2 - b^3x^2 + x^2 - a^2bc + b^4c - bc$ |
| 13) $2x - y - 2 - 8ax + 4ay + 8a$ | 14) $3a^2x - 3b^2x - 3x - a^2 + b^2 + 1$ |
| 15) $10a + 15b + 20 - 6ax - 9bx - 12x$ | 16) $10a - 15b - 20 + 6ax - 9bx - 12x$ |

CASO 3: DIFERENCIA DE CUADRADOS

En la página 5 se vio que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Es bien obvio que si se invierte la igualdad anterior sigue siendo lo mismo: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Visto en esta forma, a la inversa del producto notable, se obtiene la factorización de una diferencia de cuadrados. Obsérvese que en $(a + b)(a - b)$, la operación principal es la multiplicación.

De lo anterior puede escribirse la siguiente regla:

Una diferencia de cuadrados se factoriza en dos binomios conjugados, formados con las raíces cuadradas de los términos originales.

Es importante señalar que da lo mismo que primero se escriba el binomio suma que el binomio resta, ya que la multiplicación es conmutativa.

Ejemplo 1: Factorizar $4a^2 - x^6$

Solución: La raíz cuadrada de $4a^2$ es $2a$ y de x^6 es x^3 . De manera que los binomios conjugados que le corresponden son $(2a + x^3)(2a - x^3)$.

La factorización es: $4a^2 - x^6 = (2a + x^3)(2a - x^3)$.

Ejemplo 2: Factorizar $49a^4b^6 - 100x^2$

Solución: La raíz cuadrada de $49a^4b^6$ es $7a^2b^3$ y de $100x^2$ es $10x$. De manera que los binomios conjugados que le corresponden son $(7a^2b^3 + 10x)(7a^2b^3 - 10x)$.

La factorización es: $49a^4b^6 - 100x^2 = (7a^2b^3 + 10x)(7a^2b^3 - 10x)$.

Ejemplo 3: Factorizar $1 - 196a^4b^{16}$

Solución: La raíz cuadrada de 1 es 1 y de $196a^4b^{16}$ es $14a^2b^8$. De manera que los binomios conjugados que le corresponden son $(1 + 14a^2b^8)(1 - 14a^2b^8)$.

La factorización es: $1 - 196a^4b^{16} = (1 + 14a^2b^8)(1 - 14a^2b^8)$.

Ejemplo 4: Factorizar $\frac{(5 + b^7)^2}{9} - \frac{49}{a^6}$

Solución: La raíz cuadrada de $\frac{(5 + b^7)^2}{9}$ es $\frac{5 + b^7}{3}$ y de $\frac{49}{a^6}$ es $\frac{7}{a^3}$.

De manera que los binomios conjugados que le corresponden son

$$\left(\frac{5 + b^7}{3} + \frac{7}{a^3} \right) \text{ y } \left(\frac{5 + b^7}{3} - \frac{7}{a^3} \right).$$

y la factorización correspondiente es:

$$\frac{(5 + b^7)^2}{9} - \frac{49}{a^6} = \left(\frac{5 + b^7}{3} + \frac{7}{a^3} \right) \left(\frac{5 + b^7}{3} - \frac{7}{a^3} \right).$$

EJERCICIO 6



Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $36b^2 - 9$ | 2) $25a^4 - 9x^2$ | 3) $c^2 - a^2c^2$ |
| 4) $64a^8b^2 - 49$ | 5) $16a^6 - 1$ | 6) $81c^2 - 25x^8$ |
| 7) $144 - 36a^4c^2$ | 8) $1 - 9b^4x^4$ | 9) $c^2 - 144a^2b^2$ |
| 10) $400b^6 - 81$ | 11) $x^2 - 36b^4$ | 12) $4b^2c^2 - 4x^2$ |
| 13) $64b^6 - 169a^6$ | 14) $a^2b^4 - 36x^2$ | 15) $196b^{16}c^{25} - 100a^{16}$ |
| 16) $16f^{16} - a^2$ | 17) $64b^{64} - d^8x^{12}$ | 18) $400 - 100g^{100}$ |
| 19) $121 - x^8y^6$ | 20) $4c^4d^{16} - 16$ | 21) $100a^{64} - 64b^{100}$ |
| 22) $1 - 100a^6b^{12}$ | 23) $144x^{144} - 64y^{64}$ | 24) $9 - a^{10}b^{20}$ |
| 25) $196a^{12} - 16$ | 26) $25x^{14}y^6 - 64r^9$ | 27) $81 - a^{81}b^{20}$ |
| 28) $36a^{50} - 16b^{26}$ | 29) $x^{24}y^6 - 9h^9$ | 30) $1 - 49d^{49}b^2$ |
| 31) $\frac{4}{b^4} - 121$ | 32) $\frac{x^2}{y^2} - 64$ | 33) $\frac{49b^{16}}{a^4} - 9$ |
| 34) $25 - \frac{25}{36a^6}$ | 35) $\frac{1}{4} - \frac{1}{a^8}$ | 36) $\frac{4}{9w^{12}} - \frac{9x^8}{4}$ |
| 37) $\frac{144}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{49}$ | 38) $\frac{(4-x^2)^4}{9} - \frac{1}{c^8}$ | 39) $\frac{(9+x^4y^6)}{16} - \frac{1}{x^{16}}$ |

CASO 4: TRINOMIOS DE LA FORMA $x^2 + bx + c$

La forma de estos trinomios es que debe haber una sola equis cuadrada. La letra b representa en general a cualquier número que vaya junto a la x ; y la c representa a cualquier número que vaya sin la x .

El procedimiento de factorización para estos casos consiste en buscar dos números, a los cuales se les llamará m a uno y n al otro, los cuales deben cumplir los requisitos dados en la siguiente regla:

Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, se buscan dos números m y n tales que:

Sumados den b

Multiplicados den c .

Cada uno de esos números hallados m y n se colocan uno en cada paréntesis, de la siguiente manera:

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

Ejemplo 1: Factorizar $x^2 + 5x + 6$

Solución: En este caso, $b = + 5$ y $c = + 6$.

Se buscan dos números que sumados den $+ 5$ y que multiplicados den $+ 6$. Son $+ 3$ y $+ 2$.

Los factores buscados son $(x + 3)$ y $(x + 2)$.

Finalmente significa que $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$. Obsérvese que en esta última expresión, la operación principal es la multiplicación.

Ejemplo 2: Factorizar $x^2 + 5x - 6$

Solución: En este caso, $b = + 5$ y $c = - 6$.

Se buscan dos números que sumados den $+ 5$ y que multiplicados den $- 6$. Son $+ 6$ y $- 1$.

Los factores buscados son $(x + 6)$ y $(x - 1)$.

Finalmente significa que $x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$. Obsérvese que en esta última expresión, la operación principal es la multiplicación.

Ejemplo 3: Factorizar $x^2 - x - 20$

Solución: En este caso, $b = - 1$ y $c = - 20$.

Se buscan dos números que sumados den - 1 y que multiplicados den - 20 . Son - 5 y + 4 .
Los factores buscados son $(x - 5)$ y $(x + 4)$.

Significa que $x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4)$. Obsérvese que en esta última expresión, la operación principal es la multiplicación.

Ejemplo 4: Factorizar $x^2 - 2x - 24$

Solución: En este caso, $b = - 2$ y $c = - 24$.
Se buscan dos números que sumados den - 2 y que multiplicados den - 24 . Son + 4 y - 6 .
Los factores buscados son $(x + 4)$ y $(x - 6)$.

Finalmente significa que $x^2 - 2x - 24 = (x + 4)(x - 6)$. Obsérvese que en esta última expresión, la operación principal es la multiplicación.

Ejemplo 5: Factorizar $x^2 - 17x + 66$

Solución: En este caso, $b = - 17$ y $c = + 66$.
Se buscan dos números que sumados den - 17 y que multiplicados den + 66. Son - 6 y - 11 .
Los factores buscados son $(x - 6)$ y $(x - 11)$.

Finalmente significa que $x^2 - 17x + 66 = (x - 6)(x - 11)$. Obsérvese que en esta última expresión, la operación principal es la multiplicación.

Ejemplo 6: Factorizar $a^2 - 16a + 48$

Solución: En este caso, $b = - 16$ y $c = + 48$.
Se buscan dos números que sumados den - 16 y que multiplicados den + 48. Son - 4 y - 12 .
Los factores buscados son $(a - 4)$ y $(a - 12)$.

Finalmente significa que $a^2 - 16a + 48 = (a - 4)(a - 12)$. Obsérvese que en esta última expresión, la operación principal es la multiplicación.

EJERCICIO 7



Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1) $x^2 + 3x + 2$ | 2) $x^2 + 7x + 12$ | 3) $x^2 + 7x + 10$ |
| 4) $x^2 + x - 12$ | 5) $x^2 - 5x - 6$ | 6) $x^2 - 5x - 14$ |
| 7) $y^2 - 5y - 24$ | 8) $h^2 - 30 + h$ | 9) $x^2 - 24 + 2x$ |
| 10) $x^2 + 5x - 24$ | 11) $d^2 - 8d - 20$ | 12) $x^2 - 10x - 24$ |
| 13) $x^2 + 23x - 24$ | 14) $x^2 - 25x + 24$ | 15) $k^2 - 35k - 36$ |
| 16) $5x - 36 + x^2$ | 17) $13x + 36 + x^2$ | 18) $w^2 - 12w + 36$ |
| 19) $25 + y^2 - 10y$ | 20) $x^2 - 2x - 48$ | 21) $8x + x^2 + 16$ |
| 22) $36 - 37a + a^2$ | 23) $36 + b^2 - 20x$ | 24) $r^2 + 16r - 36$ |

CASO 5: TRINOMIOS DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$

La diferencia de esta forma con la anterior es que en aquella debía haber una sola equis cuadrada, mientras que en ésta debe haber más de una. La letra a representa en general a cualquier número que vaya junto a la x^2 (indica cuántas equis cuadradas hay); la letra b representa a cualquier número que vaya junto a la x (indica cuántas equis hay); y la c representa a cualquier número que vaya sin la x .

Por ejemplo, el trinomio $49x^2 - 25x + 121$ es de la forma mencionada, en donde $a = 49$; $b = -25$; $c = +121$.

Existen varios procedimientos para factorizar trinomios de esta forma, de los cuales solamente se estudiarán dos en este curso.

PRIMER PROCEDIMIENTO:

El primer procedimiento consiste en buscar dos números, a los cuales se les llamará m a uno y n al otro, los que deben cumplir los requisitos dados en la siguiente regla:

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, se buscan dos números m y n tales que:

Sumados den b , o sea que $m + n = b$;

multiplicados den el producto de ac , o sea que $mn = ac$;

el segundo término, es decir el término lineal bx , se parte en la suma de $mx + nx$, o sea que $ax^2 + bx + c = ax^2 + mx + nx + c$.

Se factoriza por agrupación.

Ejemplo 1: Factorizar $2x^2 + 5x - 3$

Solución: En este caso, $a = 2$; $b = + 5$ y $c = - 3$.

Se buscan dos números que sumados den + 5 y que multiplicados den lo que resulte de ac , es decir $(2)(- 3) = - 6$. Son + 6 y - 1 .

El término lineal (el 2º término), que es $5x$, se parte en la suma de esos números obtenidos, o sea en $6x - x$, por lo que resulta que

$$2x^2 + 5x - 3 = 2x^2 + 6x - x - 3$$

Se factoriza por agrupación:

$$2x^2 + 6x - x - 3 = 2x(x + 3) - 1(x + 3) = (2x - 1)(x + 3)$$

Finalmente $2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$. Obsérvese que en la expresión del lado derecho del signo igual, la operación principal es la multiplicación, lo que significa que $(2x - 1)$ y $(x + 3)$ son factores; por eso se obtuvo una factorización.

Ejemplo 2: Factorizar $6x^2 + 7x + 2$

Solución: En este caso, $a = 6$; $b = 7$ y $c = 2$.

Se buscan dos números que sumados den + 7 y que multiplicados den lo que resulte de ac , es decir $(6)(2) = 12$. Son + 4 y + 3 .

El 2º término, que es $7x$, se parte en la suma de esos números obtenidos, o sea en $4x + 3x$, por lo que resulta que

$$6x^2 + 7x + 2 = 6x^2 + 4x + 3x + 2$$

Se factoriza por agrupación:

$$\begin{aligned} 6x^2 + 4x + 3x + 2 &= 2x(3x + 2) + 1(3x + 2) = (3x + 2)(2x + 1) \\ 6x^2 + 7x + 2 &= (3x + 2)(2x + 1). \end{aligned}$$

Ejemplo 3: Factorizar $4x^2 + 21x - 18$

Solución: En este caso, $a = 4$; $b = 21$ y $c = - 18$.

Se buscan dos números que sumados den + 21 y que multiplicados den lo que resulte de ac , es decir $(4)(- 18) = - 72$. Son + 24 y - 3 .

El 2º término se parte en la suma de $24x - 3x$, por lo que resulta que

$$4x^2 + 21x - 18 = 4x^2 + 24x - 3x - 18$$

Se factoriza por agrupación:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 24x - 3x - 18 &= 4x(x + 6) - 3(x + 6) = (x + 6)(4x - 3) \\ 4x^2 + 21x - 18 &= (x + 6)(4x - 3). \end{aligned}$$

Ejemplo 4: Factorizar $6x^2 - 43x + 72$

Solución: En este caso, $a = 6$; $b = - 43$ y $c = 72$.

Se buscan dos números que sumados den $- 43$ y que multiplicados den lo que resulte de ac , es decir de $(6)(72) = 432$. Son $- 27$ y $- 16$.

El 2° término se parte en $- 27x - 16x$, por lo que resulta que

$$6x^2 - 43x + 72 = 6x^2 - 27x - 16x + 72$$

Se factoriza por agrupación:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 27x - 16x + 72 &= 3x(2x - 9) - 8(2x - 9) = (2x - 9)(3x - 8) \\ 6x^2 - 43x + 72 &= (2x - 9)(3x - 8) \end{aligned}$$

Ejemplo 5: Factorizar $12y^2 + 35y - 3$

Solución: En este caso, $a = 12$; $b = 35$ y $c = - 3$.

Se buscan dos números que sumados den $- 35$ y que multiplicados den lo que resulte de ac , es decir de $(12)(-3) = - 36$. Son $+ 36$ y $- 1$.

El 2° término se parte en la suma de $+ 36y - 1y$, por lo que resulta que

$$12y^2 + 35y - 3 = 12y^2 + 36y - 1y - 3$$

Se factoriza por agrupación:

$$12y^2 + 36y - y - 3 = 12y(y + 3) - 1(y + 3) = (12y - 1)(y + 3)$$

Finalmente $12y^2 + 35y - 3 = (12y - 1)(y + 3)$. Como en la expresión del lado derecho del signo igual la operación principal es la multiplicación, significa que $(12y - 1)$ y $(y + 3)$ son factores; por eso se obtuvo una factorización.

Ejemplo 6: Factorizar $3h - 15 + 6h^2$

Solución: Primero debe ordenarse el trinomio, es decir escribirlo como $6h^2 + 13h - 15$.

En este caso, $a = 6$; $b = 13$ y $c = - 15$.

Se buscan dos números que sumados den 13 y que multiplicados den lo que resulte de ac , es decir de $(6)(-15) = - 90$. Son $+ 18$ y $- 5$.

El 2° término se parte en la suma de $+ 18h - 5h$, por lo que resulta que

$$6h^2 + 13h - 15 = 6h^2 + 18h - 5h - 15$$

Se factoriza por agrupación:

$$\begin{aligned} 6h^2 + 18h - 5h - 15 &= 6h(h + 3) - 5(h + 3) = (6h - 5)(h + 3) \\ 6h^2 + 13h - 15 &= (6h - 5)(h + 3) . \end{aligned}$$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO:

El otro procedimiento para factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ se da en la siguiente regla:

Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$:

Se multiplica y divide a la vez (para que no se altere, conforme a la única propiedad de las fracciones) el polinomio original por el coeficiente a de x^2 , escribiéndolo de la siguiente forma:

$$\frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a}$$

- * *Al producto ax se le pone un nombre, por ejemplo y , es decir que $y = ax$ de manera que la expresión anterior se transforma en:*

$$\frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a} = \frac{y^2 + by + ac}{a} = \frac{1}{a} (y^2 + by + ac)$$

- * *El trinomio $y^2 + by + ac$ se factoriza igual que el caso 4, página 18, para obtener que*

$$\frac{1}{a} (y^2 + by + ac) = \frac{1}{a} (y + m)(y + n)$$

- * *Se vuelve a sustituir la variable y por su equivalente, es decir por ax .*
- * *Se localiza el factor que tenga por factor común a , para simplificarlo con el denominador.*

Ejemplo 1: Factorizar $2x^2 + 5x - 3$

Solución: En este caso, $a = 2$; $b = +5$ y $c = -3$.

Se multiplica y divide a la vez (para que no se altere, conforme a la única propiedad de las fracciones) el polinomio original por el coeficiente de x^2 , o sea por 2, escribiéndolo de la siguiente forma:

$$2x^2 + 5x - 3 = \frac{2(2x^2 + 5x - 3)}{2}$$

$$= \frac{(2x)^2 + 5(2x) - 6}{2}$$

Al producto $2x$ se le pone un nombre, por ejemplo y , es decir que $y = 2x$, de manera que la expresión anterior se transforma en:

$$\frac{(2x)^2 + 5(2x) - 6}{2} = \frac{1}{2}(y^2 + 5x - 6)$$

El nuevo trinomio $y^2 + 5y - 6$ se factoriza igual que el caso 4, página 18, para obtener que

$$\frac{1}{2}(y^2 + 5y - 6) = \frac{1}{2}(y + 6)(y - 1)$$

Se vuelve a sustituir la variable y por su equivalente, es decir por $2x$:

$$\frac{1}{2}(y + 6)(y - 1) = \frac{1}{2}(2x + 6)(2x - 1)$$

Se localiza el factor que tenga por factor común a 2 para simplificarlo con el denominador. Este factor es $(2x + 6)$, de manera que finalmente se obtiene

$$\frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2})(x + 3)(2x - 1) = (x + 3)(2x - 1)$$

La factorización buscada es $2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1)$

Ejemplo 2: Factorizar $6x^2 + 7x + 2$

Solución: En este caso, $a = 6$; $b = +7$ y $c = +2$.

Se multiplica y divide a la vez (para que no se altere, conforme a la única propiedad de las fracciones) el polinomio original por el coeficiente de x^2 , o sea por 6, escribiéndolo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 6x^2 + 7x + 2 &= \frac{6(6x^2 + 7x + 2)}{6} \\ &= \frac{(6x)^2 + 7(6x) + 2}{6} \end{aligned}$$

Al producto $6x$ se le pone un nombre, por ejemplo y , es decir que $y = 6x$, de manera que la expresión anterior se transforma en:

$$\frac{(6x)^2 + 7(6x) + 12}{6} = \frac{1}{6}(y^2 + 7y + 12)$$

El trinomio $y^2 + 7y + 12$ se factoriza igual que el caso 4, página 18, para obtener que

$$\frac{1}{6}(y^2 + 7y + 12) = \frac{1}{6}(y + 4)(y + 3)$$

Se vuelve a sustituir la variable y por su equivalente, es decir por $6x$:

$$\frac{1}{6}(y + 4)(y + 3) = \frac{1}{6}(6x + 4)(6x + 3)$$

Se localiza el factor (el paréntesis) que tenga por factor común a 6 para simplificarlo con el denominador. En este caso, ese factor común 6 está repartido en los dos factores de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}[(2)(3x + 2)][(3)(2x + 1)] &= \frac{1}{\cancel{6}}(\cancel{6})(3x + 2)(2x + 1) \\ &= (3x + 2)(2x + 1) \end{aligned}$$

La factorización buscada es

$$\boxed{6x^2 + 7x + 2 = (3x + 2)(2x + 1)}$$

Ejemplo 3: Factorizar $4x^2 + 21x - 18$

Solución: En este caso, $a = 4$; $b = 21$ y $c = -18$.

Se multiplica y divide a la vez (para que no se altere, conforme a la única propiedad de las fracciones) el polinomio original por el coeficiente de x^2 , o sea por 4, escribiéndolo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 21x - 18 &= \frac{4(4x^2 + 21x - 18)}{4} \\ &= \frac{(4x)^2 + 21(4x) - 72}{4} \end{aligned}$$

Al producto $4x$ se le pone un nombre, por ejemplo y , es decir que $y = 4x$, de manera que la expresión anterior se transforma en:

$$\frac{(4x)^2 + 21(4x) - 72}{4} = \frac{1}{4}(y^2 + 21y - 72)$$

El trinomio $y^2 + 21y - 72$ se factoriza igual que el caso 4, página 18, para obtener que

$$\frac{1}{4}(y^2 + 21y - 72) = \frac{1}{4}(y + 24)(y - 3)$$

Se vuelve a sustituir la variable y por su equivalente, es decir por $4x$:

$$\frac{1}{4}(y + 24)(y - 3) = \frac{1}{4}(4x + 24)(4x - 3)$$

Se localiza el factor que tenga por factor común a 4 para simplificarlo con el denominador. Este factor es $(4x + 24)$, de manera que finalmente se obtiene

$$\frac{1}{\cancel{4}}(\cancel{4})(x + 6)(4x - 3) = (x + 6)(4x - 3)$$

La factorización buscada es

$$4x^2 + 21x - 18 = (x + 6)(4x - 3)$$

EJERCICIO 8



Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1) $2x^2 + 7x + 5$ | 2) $3x^2 - 4x + 1$ | 3) $6x^2 + x - 1$ |
| 4) $10x^2 - 21x - 10$ | 5) $4x^2 - 17x - 15$ | 6) $7x^2 + 8x + 1$ |
| 7) $3y^2 - 25y - 50$ | 8) $4h^2 - 24h + 35$ | 9) $14x^2 - 9x - 8$ |
| 10) $11x^2 + 21x + 10$ | 11) $9d^2 - 29d - 28$ | 12) $10x^2 - 51x + 5$ |
| 13) $81^2 - 36x + 4$ | 14) $4x^2 + 44x + 121$ | 15) $49k^2 - 70k + 25$ |
| 16) $8x^2 - 10x - 25$ | 17) $15j^2 - 47j + 6$ | 18) $12t^2 - 73t + 6$ |

TRINOMIOS DE LA FORMA $ax^2 + bxy + cy^2$

Estos trinomios son semejantes a los de la forma $ax^2 + bx + c$, solamente que agregándoles la variable y , por lo que, después de factorizarse bajo el mismo procedimiento del caso 5, página 20, también se le agrega la variable y al segundo término de cada factor.

Ejemplo 1: Factorizar $2x^2 + 5xy - 3y^2$

Solución: En este caso, $a = 2$; $b = + 5$ y $c = - 3$.

Se buscan dos números que sumados den $+ 5$ y que multiplicados den lo que resulte de ac , es decir $(2)(- 3) = - 6$. Son $+ 6$ y $- 1$.

El 2º término se parte en la suma de $6xy - xy$, por lo que resulta que

$$2x^2 + 5xy - 3y^2 = 2x^2 + 6xy - xy - 3y^2$$

Se factoriza por agrupación:

$$2x^2 + 6xy - xy - 3y^2 = 2x(x + 3y) - y(x + 3y) = (2x - y)(x + 3y)$$

Finalmente significa que $2x^2 + 5xy - 3y^2 = (2x - y)(x + 3y)$.

Ejemplo 2: Factorizar $6d^2 - 13de + 6e^2$

Solución: En este caso, $a = 6$; $b = - 13$ y $c = 6$.

Se buscan dos números que sumados den $- 13$ y que multiplicados den lo que resulte de ac , es decir $(6)(6) = 36$. Son $- 4$ y $- 9$.

El 2º término se parte en la suma de $- 4de - 9de$, por lo que resulta que

$$6d^2 - 13de + 6e^2 = 6d^2 - 4de - 9de + 6e^2$$

Se factoriza por agrupación:

$$6d^2 - 4de - 9de + 6e^2 = 2d(3d - 2e) - 3e(3d - 2e) = (3d - 2e)(2d - 3e)$$

Finalmente significa que $6d^2 - 13de + 6e^2 = (3d - 2e)(2d - 3e)$.

EJERCICIO 9



Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

1) $2x^2 + 7xy + 5y^2$

4) $10j^2 - 21jk - 10k^2$

7) $3a^2 - 25ab - 50b^2$

10) $9a^2 + 12ab + 4b^2$

13) $81x^2 + 36xy + 4y^2$

2) $3x^2 - 4xy + y^2$

5) $4m^2 - 17mn - 15n^2$

8) $4h^2 - 24hi + 35i^2$

11) $9d^2 - 30df + 25f^2$

14) $4c^2 + 20cg + 25g^2$

3) $6x^2 + xy - y^2$

6) $7a^2 + 8ac + c^2$

9) $14x^2 - 9xz - 8z^2$

12) $100x^2 + 20xy + y^2$

15) $64k^2 - 48kr + 9r^2$

CASO 6: SUMA DE CUBOS

Si se multiplica $(a^2 - ab + b^2)(a + b)$ se obtiene

$$\begin{array}{r} a^2 - ab + b^2 \\ \underline{a + b} \\ a^3 - a^2b + ab^2 \\ + a^2b - ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 \qquad \qquad \qquad + b^3 \end{array}$$

es decir, que $(a^2 - ab + b^2)(a + b) = a^3 + b^3$. Obviamente que si se invierte la igualdad anterior lo que resulta es cierto sin lugar a dudas, o sea que se puede afirmar que

$$a^3 + b^3 = (a^2 - ab + b^2)(a + b)$$

lo que equivale a afirmar que la factorización de $a^3 + b^3$ es $(a^2 - ab + b^2)(a + b)$, o bien, ya que la multiplicación es conmutativa, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

De lo anterior se desprende la siguiente regla:

Una suma de cubos se factoriza en dos factores, de la siguiente forma:

El primer factor es un binomio formado con la suma de las raíces cúbicas de los términos originales;

el segundo factor es un trinomio que se forma a partir del factor anterior de la siguiente manera:

- Cuadrado del primer término (del factor anterior);*
- menos el producto del primer término (del factor anterior) por el segundo;*
- más el cuadrado del segundo término (del factor anterior).*

Ejemplo 1: Factorizar $x^3 + 1$

Solución: La raíz cúbica de x^3 es x ; la raíz cúbica de 1 es 1.

El primer factor es la suma de esas raíces cúbicas, es decir, es $(x + 1)$.

El segundo factor se forma a partir del anterior, o sea de $(x + 1)$:

⇒ cuadrado del primer término: $(x)^2 = x^2$;

⇒ menos el producto del primero por el segundo: $-(x)(1) = -x$;

Ejemplo 5: Factorizar $\frac{1}{x^6} + \frac{x^3}{8}$

Solución: La raíz cúbica de $\frac{1}{x^6}$ es $\frac{1}{x^2}$; la raíz cúbica de $\frac{x^3}{8}$ es $\frac{x}{2}$.

El primer factor es la suma de esas raíces cúbicas, es decir, es $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{x}{2}\right)$.

El segundo factor se forma a partir del anterior, o sea de $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{x}{2}\right)$:

$$\Rightarrow \text{cuadrado del primer término: } \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = \frac{1}{x^4};$$

\Rightarrow menos el producto del 1º por el 2º:

$$-\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{x}{2x^2} = -\frac{1}{2x};$$

$$\Rightarrow \text{más el cuadrado del segundo término: } \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$$

De manera que el segundo factor es $\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{4}\right)$.

Finalmente, la factorización de $\left(\frac{1}{x^6} + \frac{x^3}{8}\right)$ es

$$\left(\frac{1}{x^6} + \frac{x^3}{8}\right) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{4}\right)$$

EJERCICIO 10



Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

1) $x^3 + 8$

4) $a^3x^3 + 27$

7) $27y^{12} + 125x^3$

10) $8a^{30}x^3 + 27$

13) $27y^9 + 1$

16) $x^3 + \frac{1}{8}$

19) $\frac{1}{8} + \frac{a^3}{27}$

22) $\frac{a^3}{b^6} + \frac{b^3}{a^6}$

2) $27x^3 + 1$

5) $64x^6 + 27y^3$

8) $h^9 + 125a^6b^{24}$

11) $64b^{12}x^3 + 27$

14) $8d^9 + 27a^{18}c^{12}$

17) $a^6b^3 + \frac{8}{x^3}$

20) $\frac{x^{12}}{y^6} + \frac{1}{b^6}$

23) $\frac{x^9}{8} + \frac{8}{y^3}$

3) $64 + x^6$

6) $1 + 125a^6b^9$

9) $729x^9 + 8$

12) $125 + 27a^{24}d^6$

15) $729y^{21} + 27a^6x^3$

18) $\frac{27x^3}{8} + y^9$

21) $\frac{x^3}{1000} + \frac{b^6}{x^3}$

24) $\frac{b^3c^6}{a^3} + \frac{a^3}{b^3c^6}$

CASO 7: DIFERENCIA DE CUBOS

Si se multiplica $(a^2 + ab + b^2)(a - b)$ se obtiene

$$\begin{array}{r} a^2 + ab + b^2 \\ \underline{a - b} \\ a^3 + a^2b + ab^2 \\ - a^2b - ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 \qquad \qquad - b^3 \end{array}$$

es decir, que $(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3$. Obviamente que si se invierte la igualdad anterior lo que resulta es cierto sin lugar a dudas, o sea que se puede afirmar que

$$a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b)$$

lo que equivale a afirmar que la factorización de $a^3 - b^3$ es $(a^2 + ab + b^2)(a - b)$, o bien, ya que la multiplicación es conmutativa, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

De lo anterior se desprende la siguiente regla:

Una diferencia de cubos se factoriza en dos factores, de la siguiente forma:

*El primer factor es un binomio formado con la resta de las raíces cúbicas de los términos originales;
el segundo factor es un trinomio que se forma a partir del factor anterior de la siguiente manera:*

- \Rightarrow Cuadrado del primer término (del primer factor antes obtenido);
- \Rightarrow más el producto del primer término (del factor anterior) por el segundo;
- \Rightarrow más el cuadrado del segundo término (del factor anterior).

Ejemplo 1: Factorizar $a^3 - 1$

Solución: La raíz cúbica de a^3 es a ; la raíz cúbica de 1 es 1 .
El primer factor es la resta de esas raíces cúbicas, es decir, es $(a - 1)$.
El segundo factor se forma a partir del anterior, o sea de $(a - 1)$:
 \Rightarrow cuadrado del primer término: $(a)^2 = a^2$;
 \Rightarrow más el producto del primero por el segundo: $(a)(1) = a$;
 \Rightarrow más el cuadrado del segundo término: $(1)^2 = 1$.
De manera que el segundo factor es $(a^2 + a + 1)$.
Finalmente, la factorización de $a^3 - 1$ es

$$a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$$

Ejemplo 2: Factorizar $8x^3 - 27$

Solución: La raíz cúbica de $8x^3$ es $2x$; la raíz cúbica de 27 es 3 .
El primer factor es la resta de esas raíces cúbicas, es decir, es $(2x - 3)$.
El segundo factor se forma a partir del anterior, o sea de $(2x - 3)$:
 \Rightarrow cuadrado del primer término: $(2x)^2 = 4x^2$;
 \Rightarrow más el producto del primero por el segundo: $(2x)(3) = 6x$;
 \Rightarrow más el cuadrado del segundo término: $(3)^2 = 9$.
De manera que el segundo factor es $(4x^2 + 6x + 9)$.
Finalmente, la factorización de $8x^3 - 27$ es

$$8x^3 - 27 = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$$

Ejemplo 3: Factorizar $64b^3 - 27x^6$

Solución: La raíz cúbica de $64b^3$ es $4b$; la raíz cúbica de $27x^6$ es $3x^2$.
El primer factor es la resta de esas raíces cúbicas, es decir, es $(4b - 3x^2)$.
El segundo factor se forma a partir del anterior, o sea de $(4b - 3x^2)$:
 \Rightarrow cuadrado del primer término: $(4b)^2 = 16b^2$;
 \Rightarrow más el producto del primero por el segundo: $(4b)(3x^2) = 12bx^2$;
 \Rightarrow más el cuadrado del segundo término: $(3x^2)^2 = 9x^4$.
De manera que el segundo factor es $(16b^2 + 12bx^2 + 9x^4)$.
Finalmente, la factorización de $64b^3 - 27x^6$ es

$$64b^3 - 27x^6 = (4b - 3x^2)(16b^2 + 12bx^2 + 9x^4)$$

Ejemplo 4: Factorizar $\frac{1}{x^6} - \frac{a^3}{27}$

Solución: La raíz cúbica de $\frac{1}{x^6}$ es $\frac{1}{x^2}$; la raíz cúbica de $\frac{a^3}{27}$ es $\frac{a}{3}$.

El primer factor es la suma de esas raíces cúbicas, es decir, es $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{a}{3}\right)$.

El segundo factor se forma a partir del anterior:

$$\Rightarrow \text{cuadrado del primer término: } \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = \frac{1}{x^4};$$

$$\Rightarrow \text{más el producto del 1º por el 2º: } \left(\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{a}{3x^2};$$

$$\Rightarrow \text{más el cuadrado del segundo término: } \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9}.$$

De manera que el segundo factor es $\left(\frac{1}{x^4} + \frac{a}{3x^2} + \frac{a^2}{9}\right)$.

Finalmente, la factorización buscada es

$$\frac{1}{x^6} - \frac{a^3}{27} = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{a}{3}\right)\left(\frac{1}{x^4} + \frac{a}{3x^2} + \frac{a^2}{9}\right)$$

EJERCICIO 11



Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

1) $x^6 - 27$

4) $a^6x^3 - 27$

7) $27y^{12} - 125x^3$

10) $27a^{18}y^3 - 27$

13) $27x^6 - 1$

16) $125h^9 - 9$

19) $\frac{x^3}{y^3} - 1$

22) $1000 - \frac{1}{x^{12}}$

25) $8 - \frac{(a+b)^3}{8}$

28) $(1-x^3)^6 - (a^9+7)^{12}$

2) $27x^3 - 1$

5) $64x^3 - 27y^3$

8) $h^9 - 125a^3b^{24}$

11) $64b^{12}x^3 - 27$

14) $27d^9 - 27a^{18}c^{12}$

17) $125f^6 - b^{18}y^{21}$

20) $\frac{8}{a^6} - \frac{a^6}{27}$

23) $\frac{125}{27w^{21}} - \frac{w^{21}}{8}$

26) $\frac{(1-x)^6}{b^6} - 125$

3) $64 - x^3$

6) $1 - 125a^3b^9$

9) $729x^9 - 27$

12) $125 - 27a^{24}d^3$

15) $729y^{21} - 27a^3x^3$

18) $216x^{21} - 8a^3k^{33}$

21) $\frac{b^9}{d^9x^6} - \frac{27}{8}$

24) $1 - \frac{h^6}{m^9}$

27) $\frac{(8-b^2)^9}{y^{12}} - 8$

FACTORIZACIÓN TOTAL O COMPLETA

Si se factoriza $x^4 - y^4$, que pertenece al caso 3, diferencia de cuadrados, página 16, se obtiene que

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$$

Se observa que el segundo factor $(x^2 - y^2)$ es nuevamente una diferencia de cuadrados y, por lo tanto, puede volver a factorizarse en $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Entonces, la factorización total o completa de la expresión original $x^4 - y^4$ es:

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

Así, pues, cuando se requiere una factorización total, es necesario analizar cada factor que va resultando de la factorización anterior para ver si pertenece o no a uno de los casos de factorización anteriormente visto, pues en caso de ser así, debe continuar el proceso de factorización. En otras palabras, se dice que una factorización es **total** o **completa** si ninguno de los factores que se hayan obtenido puede volverse a factorizar. Cuando un factor, o expresión, no puede ya factorizarse se dice que es **irreductible**. De tal manera que puede decirse también que una factorización total es aquella en la que todos sus factores son irreductibles.

Ejemplo 1: Factorizar totalmente $4a^3 - 4$

Solución: La primera factorización posible es por factor común, caso 1, página 11:

$$4a^3 - 4 = 4(a^3 - 1)$$

El segundo factor es una resta de cubos, caso 7, página 31:

$$a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$$

Así que la factorización total o completa es:

$$4a^3 - 4 = 4(a - 1)(a^2 + a + 1)$$

Ejemplo 2: Factorizar totalmente $a^2c - bc^2 - 2a^2 + 2b^2$

Solución: La primera factorización posible es por agrupación, caso 2, página 13:

$$\begin{aligned} a^2c - bc^2 - 2a^2 + 2b^2 &= c(a^2 - b^2) - 2(a^2 - b^2) \\ &= (a^2 - b^2)(c - 2) \end{aligned}$$

El primer factor es una diferencia de cuadrados, caso 3, página 16 :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Así que la factorización total o completa es:

$$a^2c - bc^2 - 2a^2 + 2b^2 = (a - b)(a + b)(c - 2)$$

Ejemplo 3: Factorizar totalmente $a^2b + 3ab - 10b$

Solución: La primera factorización posible es por factor común, caso 1, página 11:

$$a^2b + 3ab - 10b = b(a^2 + 3a - 10)$$

El segundo factor es un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, caso 4, página 18:

$$a^2 + 3a - 10 = (a - 2)(a + 5)$$

Así que la factorización completa es:

$$a^2b + 3ab - 10b = b(a - 2)(a + 5)$$

Ejemplo 4: Factorizar totalmente $10a^2x + 5ax - 105x - 2a^2 - a + 21$

Solución: La primera factorización posible es por agrupación, caso 2, página 13:

$$\begin{aligned}10a^2x + 5ax - 105x - 2a^2 - a + 21 &= 5x(2a^2 + a - 21) - 1(2a^2 + a - 21) \\ &= (2a^2 + a - 21)(5x - 1)\end{aligned}$$

El primer factor es un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, caso 5, página 20:

$$\begin{aligned}2a^2 + a - 21 &= 2a^2 + 7a - 6a - 21 \\ &= a(2a + 7) - 3(2a + 7) \\ &= (2a + 7)(a - 3)\end{aligned}$$

Así que la factorización completa o total es:

$$10a^2x + 5ax - 105x - 2a^2 - a + 21 = (2a + 7)(a - 3)(5x - 1)$$

EJERCICIO 12



Factorizar totalmente las siguientes expresiones algebraicas:

- | | | |
|--|---|-------------------|
| 1) $2ax^2 - 2a$ | 2) $2a^2b - 2b - a^2 + 1$ | 3) $48 - 6x^6$ |
| 4) $3a^2b^2 - 3ab^2 - 90b^2$ | 5) $10b^2xy - 55bxy - 30xy$ | 6) $64b^3 - 8x^6$ |
| 7) $2a + 2ab^3 - 5x - 5b^3x$ | 8) $3a^6b - 3bx^2 + a^6 - x^2$ | 9) $x^8 - y^8$ |
| 10) $4a^2x - 4ax - 3x - 8a^2 + 8a + 6$ | 11) $b^{12} - c^6$ | |
| 12) $ax^2 - 5ax + 6a - 4x^2 + 20x - 24$ | 13) $x^4 - y^4$ | |
| 14) $2a^3 - 3a^2b + 10a^2x - 15abx$ | 15) $6a^2 + 9a - 60$ | |
| 16) $\frac{a}{b} + \frac{ac}{x} + \frac{a^2}{y}$ | 17) $\frac{a^3x}{y} - \frac{b^3x}{y}$ | |
| 18) $\frac{x^4}{b^2} - \frac{y^6}{b^2}$ | 19) $\frac{1}{ac} + \frac{1}{ad} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bd}$ | |

