TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

En esta sección se estudia cómo ciertas transformaciones de una función afectan su gráfica. Esto proporciona una mejor comprensión de cómo graficar funciones. Las transformaciones que se estudian son desplazamiento, reflexión y estiramiento.

1. DESPLAZAMIENTO VERTICAL

Sumar una constante a una función desplaza su gráfica en dirección vertical: hacia arriba si la constante es positiva y hacia abajo si es negativa.

Ejemplo 1.

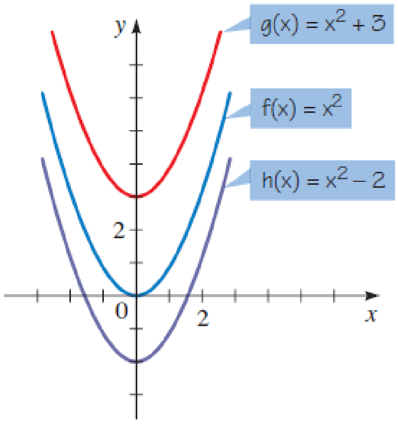
A partir de la gráfica de la función $f(x) = x^2$ graficar las siguientes funciones:

$$\mathrm{g(x) = x^2 + 3} \qquad\qquad \mathrm{h(x) = x^2 - 2}$$

Solución.

a) Para graficar $\mathrm{g(x)}$ la gráfica de $\mathrm{f(x)}$ se desplaza 3 unidades hacia arriba, como se muestra.

b) Para graficar $\mathrm{h(x)}$ la gráfica de $\mathrm{f(x)}$ se desplaza -2 unidades hacia abajo, como se muestra.



Ejemplo 2.

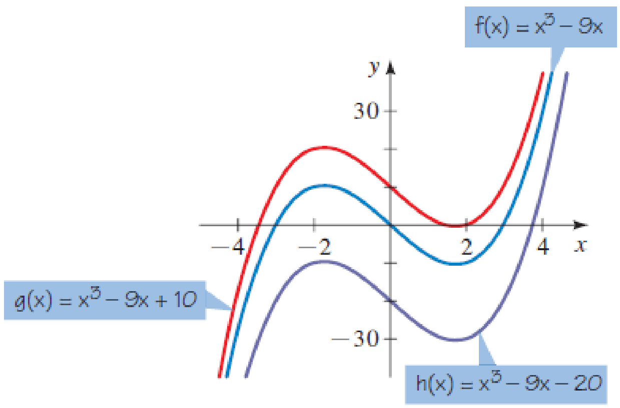
A partir de la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 9x$ graficar las siguientes funciones:

$$g(x) = x^3 - 9x + 10 \qquad\qquad h(x) = x^3 - 9x - 20$$

Solución.

a) Para graficar $\mathrm{g(x)}$ la gráfica de $\mathrm{f(x)}$ se desplaza 10 unidades hacia arriba, como se muestra.

b) Para graficar $\mathrm{h(x)}$ la gráfica de $\mathrm{f(x)}$ se desplaza 20 unidades hacia abajo, como se muestra.



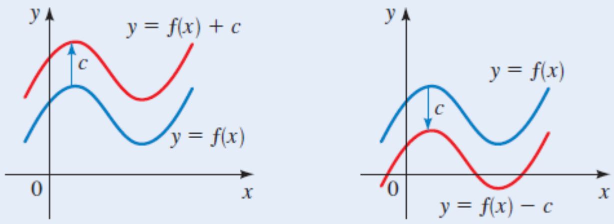
En conclusión:

Desplazamientos verticales de gráficas

Suponga que $c > 0$.

Para graficar $y = f(x) + c$, desplace c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$.

Para graficar $y = f(x) - c$, desplace c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$.



2. DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL

Sumar una constante a la variable de una función desplaza su gráfica en dirección horizontal: hacia la derecha si la constante es negativa y hacia izquierda si la constante es positiva.

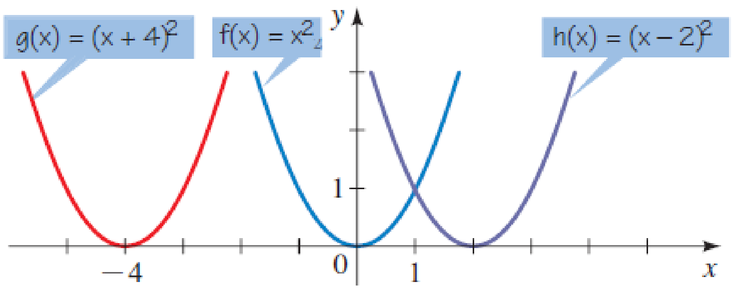
Ejemplo 1.

A partir de la gráfica de la función $f(x) = x^2$ graficar las siguientes funciones:

$$g(x) = (x+3)^2 \qquad\qquad h(x) = (x-2)^2$$

a) Para graficar $\mathrm{g(x)}$ la gráfica de $\mathrm{f(x)}$ se desplaza 4 unidades hacia la izquierda, como se muestra.

b) Para graficar $\mathrm{h(x)}$ la gráfica de $\mathrm{f(x)}$ se desplaza -2 unidades hacia derecha, como se muestra.



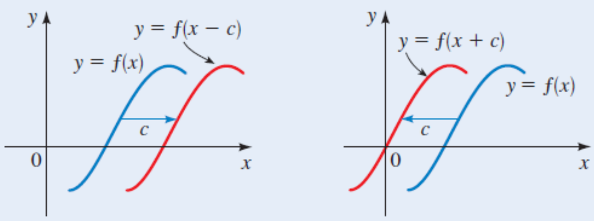
En conclusión:

Desplazamientos horizontales de gráficas

Supóngase que $c > 0$.

Para graficar $y = f(x - c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ a la derecha c unidades.

Para graficar $y = f(x + c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ a la izquierda c unidades.



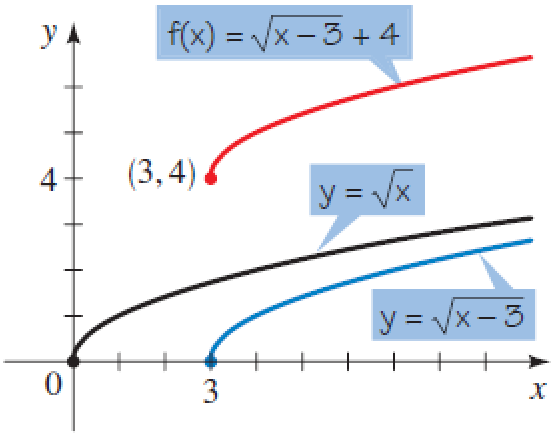
3. COMBINACIÓN DE DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES Y VERTICALES

Ejemplo 1

Bosqueje la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x-3} + 4$.

Solución Se empieza con la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y se desplaza a la derecha 3 unidades para obtener la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$ luego la gráfica resultante se desplaza 4 unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x-3} + 4$ mostrada en la figura

.



4. REFLEXIÓN DE GRÁFICAS

Suponga que se conoce la gráfica de $f(x)$. ¿Cómo se emplea para obtener las gráficas de $-f(x)$ y $f(-x)$?

- $-f(x)$ es la reflexión de la función $f(x)$ con respecto al eje X
- $f(-x)$ es la reflexión de la función $f(x)$ con respecto al eje Y

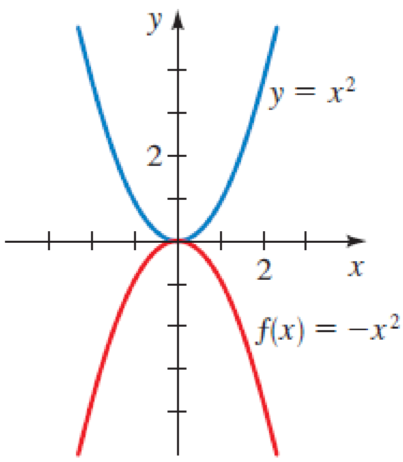
Ejemplo 1

Trace la gráfica de las siguientes funciones:

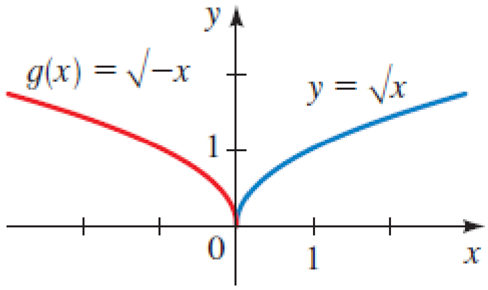
$f(x) = -x^2$ $\qquad\qquad$ $g(x) = \sqrt{-x}$

Solución:

a. Se empieza con la gráfica de $f(x) = x^2$. La gráfica de $f(x) = -x^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ reflejada en el eje x



b. Se inicia con la gráfica de $g(x) = \sqrt{x}$. La gráfica de $g(x) = \sqrt{-x}$ es la gráfica de $g(x) = \sqrt{x}$ reflejada en el eje y.

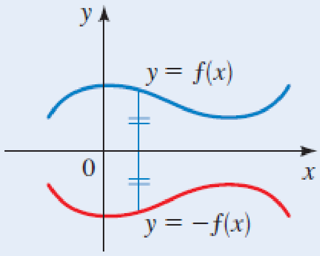


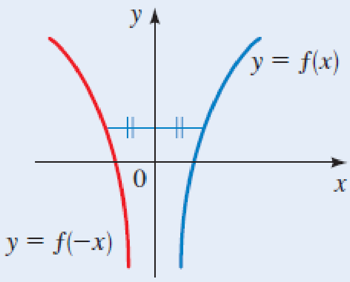
En Conclusión.

Reflexión de gráficas

Para graficar $y = -f(x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x.

Para graficar $y = f(-x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y.





5. ESTIRAMIENTO Y ACORTAMIENTO VERTICAL

Suponga que se conoce la gráfica de $f(x)$¿Cómo se obtiene la gráfica de $Cf(x)$?
Las coordenadas de $Cf(x)$ son las mismas coordenadas de $f(x)$ multiplicada por c".
Al multiplicar las coordenadas de $f(x)$ por "c" se obtiene un efecto de alargamiento o acortamiento vertical de la gráfica dependiendo del valor del factor de c".

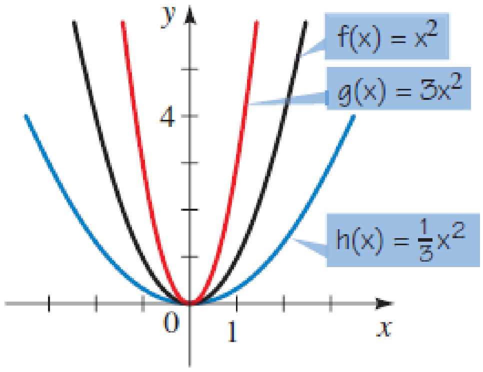
Ejemplo 1.
A partir de la gráfica de la función $f(x) = x^2$ graficar las siguientes funciones:

$$g(x) = 3x^2 \qquad\qquad h(x) = \frac{1}{3}x^2$$

Solución:

a) La gráfica de $g(x) = 3x^2$ se obtiene al multiplicar los valores de $f(x) = x^2$ por 3. Es decir, para obtener la gráfica de $g(x) = 3x^2$ se alarga la gráfica de $f(x) = x^2$ verticalmente por un factor de 3. El resultado es la parábola más estrecha en la figura.

b) La gráfica de $h(x) = \frac{1}{3}x^2$ se obtiene al multiplicar los valores de $f(x) = x^2$ por $\frac{1}{3}$. Es decir, para obtener la gráfica de $h(x) = \frac{1}{3}x^2$ se acorta la gráfica de $f(x) = x^2$ verticalmente por un factor de 1/3. El resultado es la parábola más amplia en la figura.



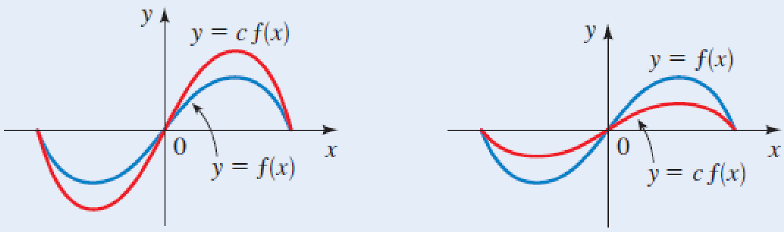
En conclusión:

Estiramiento y acortamiento vertical de gráficas

Para graficar $y = cf(x)$:

Si $c > 1$, alargue verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.

Si $0 < c < 1$, acorte verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.

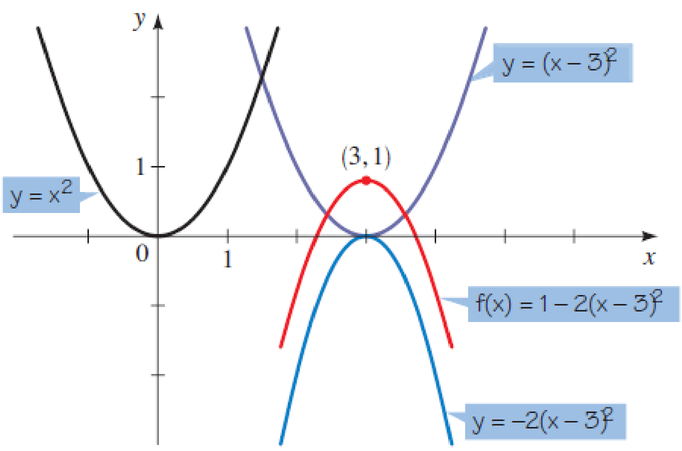


$c > 1$ $\qquad$ $0 < c < 1$

6. COMBINACIÓN DE DESPLAZAMIENTO, ESTIRAMIENTO Y REFLEXIÓN

Ejemplo.
Bosqueje la gráfica de la función $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$

Solución:
Comenzando con la gráfica $f(x) = x^2$, se desplaza primero a la derecha 3 unidades para obtener la gráfica de $f(x) = (x - 3)^2$. Luego se refleja en el eje x y se alarga por un factor de 2 para obtener la gráfica de $f(x) = -2(x - 3)^2$. Por último, se desplaza 1 unidad hacia arriba para obtener la gráfica de $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$ mostrada en la figura.



7. ALARGAMIENTO Y ESTIRAMIENTO HORIZONTAL

Ahora abordaremos el acortamiento y alargamiento horizontal de gráficas.
Si se conoce la gráfica de $\mathrm{f(x)}$, entonces ¿cómo se relaciona la gráfica de $\mathrm{f(Cx)}$con ésta?

a) Si la constante "c" es un número cuyo valor varía entre cero y uno, entonces $f(Cx)$ sufre un alargamiento horizontal con respecto a $f(x)$.

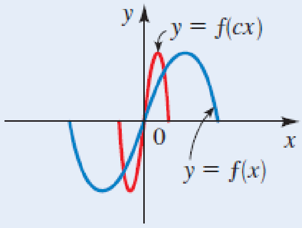
b) SI la constante "c" es un numero cuyo valor es mayor que uno, entonces $f(Cx)$ sufre un acortamiento horizontal con respecto a $f(x)$.

Acortamiento y alargamiento horizontal de gráficas

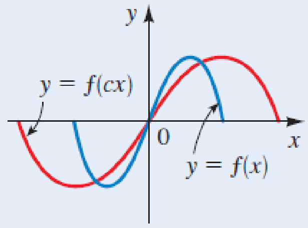
La gráfica de $y = f(cx)$:

Si $c > 1$, acorte la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $1/c$.

Si $0 < c < 1$, alargue la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $1/c$.



$c > 1$



$0 < c < 1$